

Rekurziók, algoritmusok

5-8. osztályban már bőven el lehet kezdeni

Erdős Gábor

erdosgaborkanizsa@gmail.com

www.microprof.hu

Bábuk a sakktáblán

Egy sakktábla bal alsó 3×3 -as résztáblájának minden mezőjén egy-egy korongot helyeztünk el. Bármely koronggal átugorhatunk vele élben vagy csúcsban szomszédos mezőn álló korongot, ha az érkezési mező üres. Egy másik megengedett lépés, hogy egy korongot feljebb tolhatunk egy mezővel, ha az a mező üres. Minimum hány lépésben lehet eljuttatni a 9 korongot a bal felső 3×3 -as résztábla mezőire úgy, hogy minden mezőn egy korong álljon?

Bábuk a sakktáblán

Csak ugrásokkal: invariancia

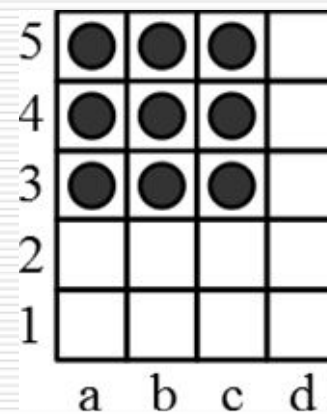
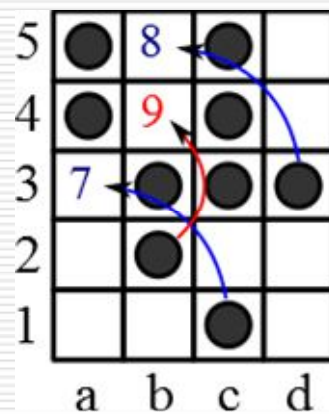
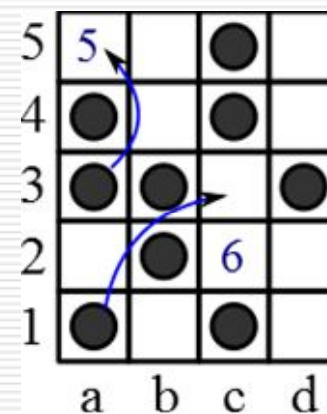
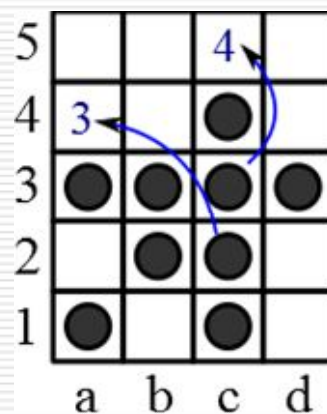
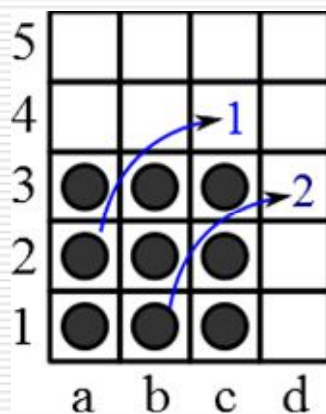
Minimum 3 tolás kell

Összesen $9 \cdot 5 = 45$ egységet kell haladni, ebből 3 tolás, kell $(45 - 3) : 2 = 21$ ugrás, tehát összesen $3 + 21 = 24$ lépés.

Konstrukció – hogy írjam le?

Algoritmus: egy lépéssorral minden bábu 2 sorral feljebb, ezt végigcsinálom 2-szer, aztán a 7. sort feltolom a 8-ra, majd az 5. sorból felugrok a 7-re

Bábuk a sakktáblán



Dobozok a raktárban

Egy raktárban 11 darab nagy doboz áll, melyek közül néhány üres, a többi nagy doboz mindegyikében 8 darab közepes doboz található. A közepes dobozok közül néhány üres, a többiben 8-8 darab kis doboz van. A kis dobozok mindegyike üres. Hány doboz van a raktárban összesen, ha az üres dobozok száma 102?

Dobozok a raktárban

Kezdeti állapot: 11 üres nagy doboz

Lépés: 1 dobozt megtölt 8 kisebb dobozzal

Állapotfüggvények:

$u(n)$: üres dobozok száma n lépés után

$t(n)$: tele dobozok száma n lépés után

Kezdőértékek: $u(0)=11$, $t(0)=0$

Rekurziós lépés:

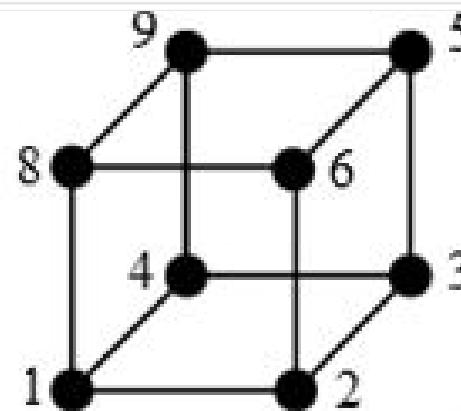
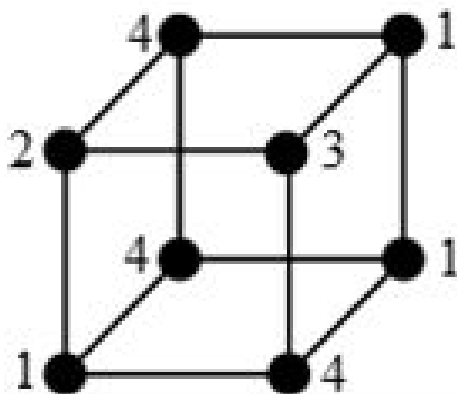
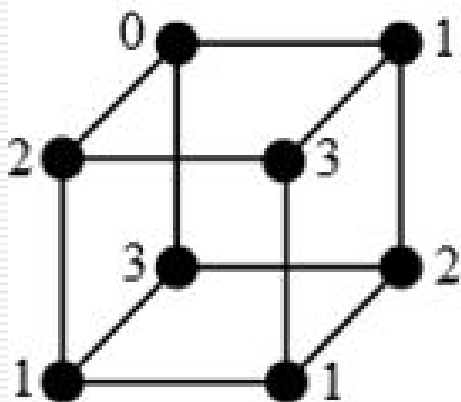
$t(n+1)=t(n)+1$ és $u(n+1)=u(n)+7$

Explicit alak: $t(n)=n$ és $u(n)=11+7n$

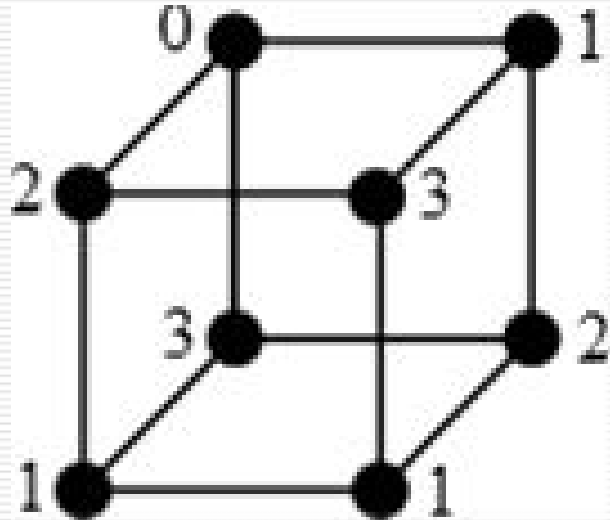
$102=11+7n \Rightarrow n=t(n)=13 \Rightarrow 102+13=115$ doboz.

Számok egy kocka csúcsainál

Egy kocka minden csúcsához egy számot írtunk. Ezután egy lépésben valamelyik él két végpontján lévő számokat eggyel megnöveljük. Elérhető-e néhány lépésben, hogy minden csúcsnál ugyanaz a szám álljon?



Számok egy kocka csúcsainál



Állapotfüggvény:

számok összege

Változás egy lépés során:

2-vel nő

Invariáns:

az összeg paritása

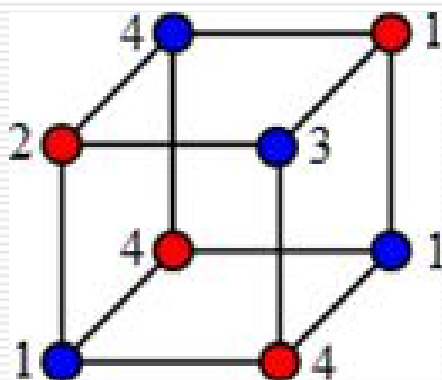
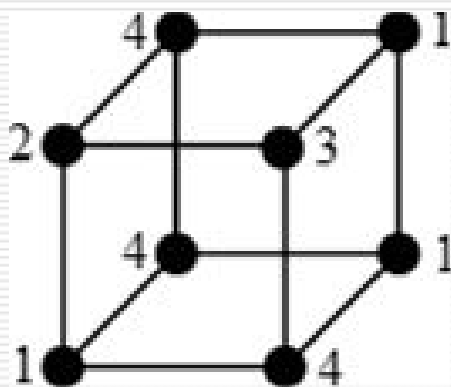
Kezdőállapot: 13

Végállapot: 4-gyel osztható

Következtetés:

nem érhető el

Számok egy kocka csúcsainál



Az előző alapján:
az összeg kezdetben 20,
tehát lehetséges?

Nem, csak azt tudjuk, hogy
ettől akár még lehet

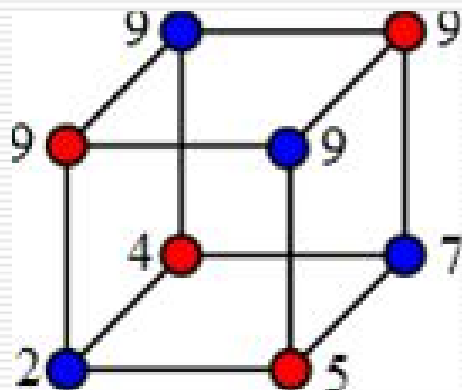
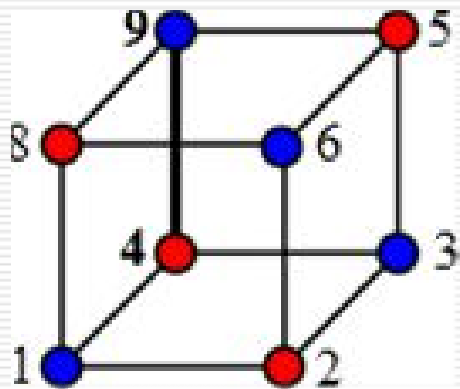
Színezés, új állapotfüggvény:
piros – kék különbség

Ez a lépések során invariáns

Kezdetben 2, a végén 0
tehát ez sem lehetséges

Ez a feltétel elégséges is?

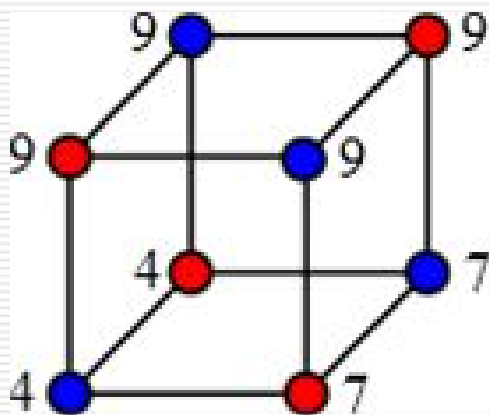
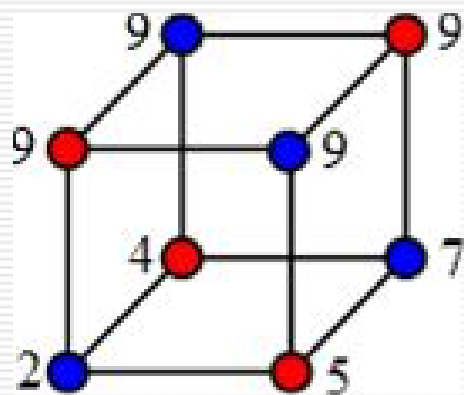
Számok egy kocka csúcsainál



Algoritmust adok meg,
amelyről látszik, hogy
mindig végrehajtható

1. lépés: A legnagyobb szám legyen felül, ennek az oszlopát rögzítem
2. lépés: A többi oszlopot növelem, amíg felül minden szám egyenlő nem lesz egymással

Számok egy kocka csúcsainál

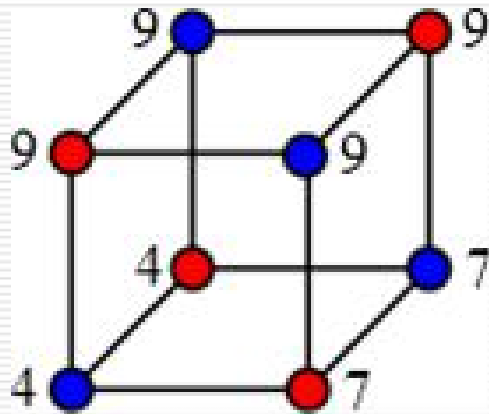


Alul megkeresem a legnagyobb számot, és ezt rögzítem (itt: 7).

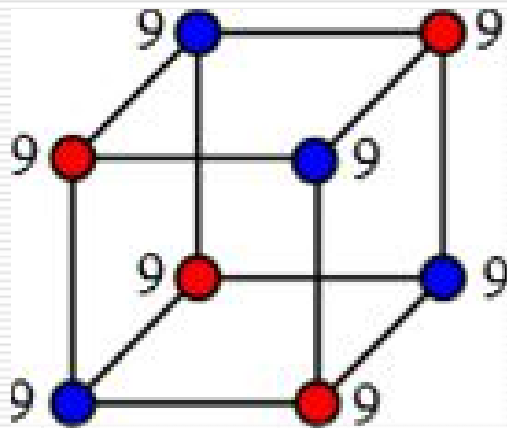
Kiválasztom valamelyik szomszédját, és azt megnövelem úgy, hogy egyenlő legyen vele. (5)

Ekkor alul a másik két szám is egyenlő lesz, mert csak így teljesül a feltétel.

Számok egy kocka csúcsainál



Most alul 2-2 egyforma szám áll. Az ezeket összekötő éleket használva (4-4, 7-7) elérem, hogy minden szám alul is annyi legyen, mint felül.



A királyfi és a sárkány

A királyfi találkozik a 100 fejű sárkánnyal. Egy kardvágással 7, 9 vagy 11 fejét tudja levágni. Igen ám, de az első esetben a sárkánynak 13 új feje nő ki, a másodikban 18, a harmadikban pedig 5. Ha a sárkány összes feje lehullott, nem nő ki több. Minimum hány suhintással tudja legyőzni a királyfi a sárkányt?

A királyfi és a sárkány

Lépés:	A	B	C
Levág:	7	9	11
Kinő:	13	18	5
Változás:	+6	+9	-6

Invariancia: 3-as maradék – lehetetlen?

Nem! Utolsó csapás csak A lehet (1 maradék)

Előtte 93 csökkenés kell, nem lehet csak C

Ideális: 1 db B, 17 db C, 1 db A – 19 vágás

A strucctojás töréstesztje

Van 4 egyforma strucctojásunk. Szeretnénk 7 dobással kideríteni, hogy egy emeletes házban hányadik az az emelet, amelyről ledobva már összetörik, de egy emelettel lejjebből dobva még éppen nem törik össze. Maximum hány emeletes lehet az a ház, amelyben ezt szerencse nélkül meg tudjuk tenni?

(Lehet, hogy a legfelső emeletről sem törik össze. A tojások a kérdés szempontjából egyformák. Legkésőbb akkor meg kell tudnunk mondani, „hol a határ”, miután mind a 4 tojás eltört vagy elvélgeztük a hetedik dobásunkat.)

A strucctojás töréstesztje

Eredeti feladat: 2 tojás, 36 emelet,
kérdés a minimális dobásszám

$e(d;t)$ állapotfüggvény:

d dobással, t tojással ennyi emeletes lehet a ház

Az első ledobom valahonnan.

Ha eltörik, alatta $e(d-1;t-1)$ emelet maradhat.

Ha nem, akkor felette $e(d-1;t)$ emelet vizsgálható.

Rekurzió: $e(d;t) = e(d-1;t-1) + e(d-1;t) + 1$

Kezdeti értékek: $e(d;1) = d$ és $e(1;t) = 1$

A strucctojás törésteztje

$t \backslash d$	1	2	3	4	5	6	7
1	1	2	3	4	5	6	7
2	1	→	→	→	→		
3	1	→					
4	1	→					

$t \backslash d$	1	2	3	4	5	6	7
1	1	2	3	4	5	6	7
2	1	3	6	10	15	21	28
3	1	3	7	14	25	41	63
4	1	3	7	15	30	56	98

Gráfszínező algoritmusok

Egy 111 tagú társaságban mindenki legfeljebb 10 másik embert ismer.

a) Mutassuk meg, hogy van a társaságban 11 olyan ember, akik közül senki nem ismer senkit.

b) Mutassuk meg, hogy el lehet helyezni a társaságot 11 szobába úgy, hogy az egy szobába kerülők közül senki ne ismerje egyik szobatársát sem.

Gráfszínező algoritmusok

Mindkét esetben megadunk egy olyan kiválasztó algoritmust, amelyik minden esetben működik, ezzel az állításokat bizonyítjuk.

a) Egy embert kiválasztok. Ismerőseit megkérem, hogy menjenek ki az udvarra. A kiválasztott ember nem ismer senkit a jelenlévők közül.

Összesen 10 lépés után kiválasztottam 10 embert és maximum 100 ment ki az udvarra. De akkor legalább 1 maradt, őt is kiválasztom.

A korlát éles: 110 főre van ellenpélda:
10 focicsapat, akik csak a csapattársaikat ismerik

Gráfszínező algoritmusok

b) Kezdjünk színes sapkákat tenni a fejekre. Az első 11 ember mind kapjon különböző színűt. Ettől kezdve nézzük meg, hogy a soron következő ismerősei milyen színű sapkát viselnek, és rá adjunk egy ettől különböző színűt. Ez mindig megtehető, hiszen legfeljebb 10 ismerőse van, és 11 szín áll rendelkezésünkre.

Az algoritmus nyilván nem akad el. A végén mindenkinek sapka lesz a fején. Az egyforma színű sapkát viselők menjenek egy terembe.

Gráf kromatikus száma - négyszíntétel

NMDO, 2017, 5. feladat

Sorban áll $n \cdot (n+1)$ különböző magasságú focista. Bizonyítsuk be, hogy a kezdeti sorrendjüktől függetlenül meg lehet kérni közülük $n \cdot (n-1)$ -et, hogy álljon ki a sorból, és a sorban maradó $2n$ focista közül az 1. és 2. legmagasabb között sem áll senki, a 3. és 4. legmagasabb között sem áll senki, ..., végül a $(2n-1)$. és a $(2n)$. között sem áll senki.

NMDO, 2017, 5. feladat

Erdős Pál Matematikai Tehetséggondozó Iskola

Borbényi Marci (aranyérem) megoldása

Kicsiknek jobb: konkrét számmal, $n=5$ elég.

Eredeti számsor:

8 19 1 14 9 13 3 4 7 20 16 17 2 12 6 11 15 5 18 10

Felosztom 4 db 5-ös csoportba:

8 19 1 14 9 | 13 3 4 7 20 | 16 17 2 12 6 | 11 15 5 18 10

Addig jelölök meg növekvő sorrendben számokat,
amíg az egyik csoportban két megjelölt nem lesz:

8 19 **1** 14 9 | 13 **3 4** 7 20 | 16 17 **2** 12 6 | 11 15 5 18 10

NMDO, 2017, 5. feladat

8 19 **1** 14 9 | 13 **3** **4** 7 20 | 16 17 **2** 12 6 | 11 15 5 18 10

Ezt a két számot megtartom. Ebből a csoportból törölök minden mást, és a többi csoportból a legkisebb számot, függetlenül attól, kijelölt volt-e:

8 19 14 9 | **3** **4** | 16 17 12 6 | 11 15 18 10

Az eredeti 2. csoport kész: a két legmagasabb között nem áll senki. A többi mind alacsonyabb.

Maradt: 3 db 4-es csoport. Megismétlem a lépést.

8 19 14 **9** | **3** **4** | 16 17 12 **6** | 11 15 18 10

8 **9** | **3** **4** | 16 17 **12** | **11** **15** 18

8 **9** | **3** **4** | 16 17 | **11** **15**

NMMV, 2018, 7. oszt. 8. feladat

Egy emeletes ház minden emeletét pirosra, fehérre vagy zöldre festették. Tudjuk, hogy nincs három olyan közvetlenül egymás fölött lévő emelet, amelyeknek mindegyikét fehérre festették. Hányféleképpen lehet kifesteni a házat a szabályoknak megfelelően, ha az emeletek száma

a) 4?

b) 7?

NMMV, 2018, 7. oszt. 8. feladat

Van elemi összeszámolásos megoldás is.

Legyen $s(n)$: az n emeletes ház megfelelő színezéseinek a száma; kérdés: $s(7)=?$

Tekintsünk most egy 7 emeletes szállodát, és bontsuk esetekre a felső emeletek színe szerint.

Felső piros vagy zöld: alatta egy szabályos, 6 emeletes ház, ez tehát $2 \cdot s(6)$ eset.

Felső fehér, alatta nem fehér: $2 \cdot s(5)$ eset.

Felső 2 fehér, így alatta nem fehér: $2 \cdot s(4)$ eset.

Kaptuk: $s(7)=2 \cdot (s(6)+s(5)+s(4))$

NMMV, 2018, 7. oszt. 8. feladat

Jobb visszafelé lépni – programozó gondolkodás

Kéne $s(6)$, $s(5)$ és $s(4)$, ezek hasonlóan kaphatók

Valójában: $s(n) = 2 \cdot (s(n-1) + s(n-2) + s(n-3))$

Nyilván $s(1) = 3$, $s(2) = 3 \cdot 3 = 9$ és $s(3) = 3 \cdot 3 \cdot 3 - 1 = 26$

Harmadrendű rekurzív definíció

Innen már $s(7)$ értéke számolható:

$$s(4) = 2 \cdot (26 + 9 + 3) = 76$$

$$s(5) = 2 \cdot (76 + 26 + 9) = 222$$

$$s(6) = 2 \cdot (222 + 76 + 26) = 648$$

$$s(7) = 2 \cdot (648 + 222 + 76) = 1892$$

Köszönöm a figyelmet!

Erdős Gábor

erdosgaborkanizsa@gmail.com

www.microprof.hu