Egy geometria feladat margójára

Erdős Gábor

2019. június 3.

A feladat

Az ABC szabályos háromszög AB oldalának felezőpontja F. A CF szakasz azon belső pontja a D pont, amelyre az ADB szög 90 fokos. A CF szakasz azon belső pontja az E pont, amelyre a CD és a DE szakaszok hossza egyenlő. Hány fokos az AEB szög?

Aki igazán ismer, velem együtt meglepődik rajta: idén javasoltam egy elemi geometria feladatot is a versenyre. Mivel az általam beküldött megoldásvázlat elemi volt, így a feladat kilencedik osztályban került kitűzésre.

A feladatot a versenyzők többsége trigonometriai eszközkészlettel oldották meg, vagyis addíciós tétel segítségével.

Ezt követően azon kezdtem el gondolkodni, vajon milyen elemi, kilencedik osztályig tanórán vagy szakkörön tanult eszközökkel oldható meg a feladat. Néhány ilyen elemi megoldás eszembe jutott, és megkérdeztem néhány barátomat is. Nekem tetszett az összegyűjtött anyag, ezért gondoltam, leírom. Több olyan megoldás volt, amelyet egymástól függetlenül többen is elküldtek nekem, ezeknél a megoldásoknál szerzőként valamennyiük nevét feltüntettem. A megoldások között szerepel Jánosik Máté megoldása, aki a versenyen a leírt módon oldotta meg a feladatot.

Néhány gondolat a megoldásokról:

Az 1-3. megoldás még Pitagorasz-tételt sem használt, a Thalész-tétel megfordítása megkerülhető a téglalap átlóira történő hivatkozással, vagyis a tapasztalat szerint ez a két megoldás egy hetedik osztályos magyarországi versenyen is teljesen elfogadott lenne szakmailag.

A 4-7. megoldások Pitagorasz-tételt használnak, illetve speciális háromszögek tulajdonságait; mindezek tipikusan előfordulnak a 8-9. osztály versenyein, nem mutatnak túl a korosztály számára a tanórákon tanított tananyagon.

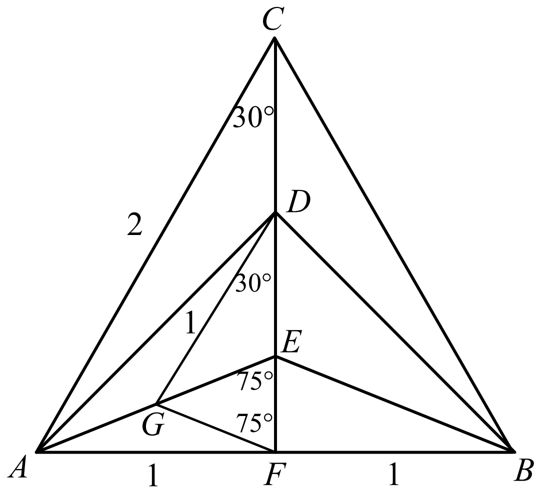
A 8-12. megoldások voltak azok, amelyek a hasonlóság fogalmán alapuló ismereteket követeltek meg. Fontosnak gondolom, hogy ezeket az eszközöket már 8. osztályban ismerjék meg a legjobbak. Nem húznék párhuzamot az addíciós tételek vagy a cosinustétel kilencedik osztályban való megtanításával. A hasonlóság elemi eszköz, évekkel ezelőtt minden nyolcadikos tanulta, a legjobbaknak most sem szabadna kihagyni.

A 13. és a 14. megoldás közös eleme, hogy kihasznál egy-egy ismert feladatot, olyant, amelyet egy jól felkészített versenyzőnek ebben a korban már látnia kellett. Versenyeken gyakori, hogy a feladat visszavezethető egy ismert problémára. Ezt a megoldást akkor van reménye megtalálni a versenyzőnek, ha azt a bizonyos problémát ismeri. Aztán a 14. feladattól kezdődően egy újabb megoldási stratégiát láthatunk: használjuk ki a szimmetriákat, alkalmazzunk egybevágósági transzformációkat a megoldás során. Nekem különösen tetszett a 14. megoldás.

Nagy öröm volt ez a közös munka, amelyet a verseny egyik résztvevőjével és az Erdős Pál Matematikai Tehetséggondozó Iskola lelkes tanáraival végeztünk. Köszönöm mindannyiuk remek ötleteit. Meggyőződésem, hogy további szép megoldások vannak még, amiket mi az elmúlt két hét során nem találtunk meg: ezt a munkát nem lehet befejezni, legfeljebb valamikor abbahagyni. Mi most hagyjuk abba, de akinek kedve van, folytassa. Jó szórakozást hozzá.

1. megoldás (*Erdős Gábor*)

Legyen a háromszög oldalának hossza 2 egység.



Legyen az AE szakasz felezőpontja G.
GD középvonal az AEC háromszögben, így

$$GD = \frac{AC}{2} = 1.$$

Az AFD háromszög egyenlő szárú és derékszögű, így

$$AF = FD = 1.$$

Az FDG háromszög egyenlő szárú, mivel $GD = FD = 1$.
$GDF\sphericalangle = ACF\sphericalangle = 30°$, hiszen egyállású szögek, ezért

$$GFD\sphericalangle = \frac{180° - 30°}{2} = 75°.$$

A Thalész-tétel megfordítása miatt az AFE háromszög köré írt kör középpontja G, így az EGF háromszög is egyenlő szárú, azaz

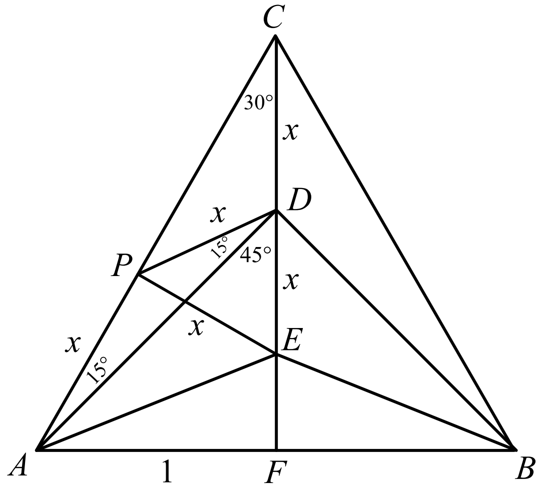
$$AEF\sphericalangle = GFD\sphericalangle = 75°.$$

A kérdezett szög tehát:

$$AEB\sphericalangle = 2 \cdot AEF\sphericalangle = 150°.$$

2. megoldás (*Katz Sándor, Szaszkó-Bogárné Eckert Bernadett*)

Használjuk az ábra jelöléseit. Legyen E-ből az AC-re bocsátott merőleges talppontja P.



CPE félszabályos háromszög, így

$$EP = CD = DE = x.$$

Thalész-tétel megfordítása miatt a CPE háromszög köré írt kör középpontja D, ezért

$$DP = x.$$

PDE háromszög szabályos, ezért

$$PDE\sphericalangle = 60°.$$

Az ADC háromszög D csúcsnál lévő külső szöge $ADF\sphericalangle = 45°$, ezért

$$CAD\sphericalangle = 45° - 30° = 15°.$$

Mivel $PDA\sphericalangle = 60° - 45° = 15°$, ezért az APD háromszög egyenlő szárú, vagyis

$$AP = x.$$

Már láttuk, hogy $EP = DP$, így $AP = EP$.

Vagyis az APE háromszög is egyenlő szárú, ezért alapon fekvő szöge

$$PAE\sphericalangle = 45°.$$

Az AEC háromszög E csúcsnál lévő külső szöge ezért

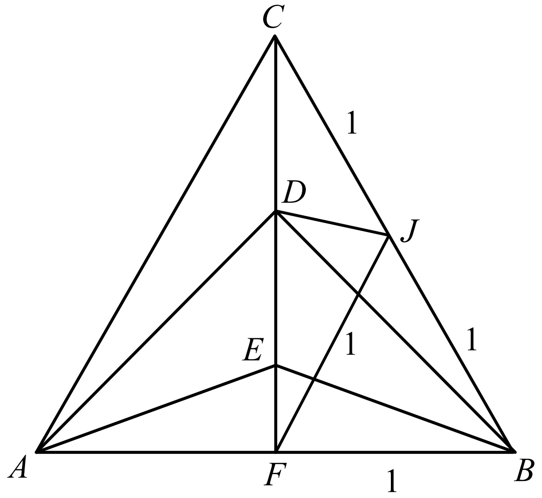
$$AEF\sphericalangle = 30° + 45° = 75°.$$

A kérdezett szög tehát:

$$AEB\sphericalangle = 2 \cdot AEF\sphericalangle = 150°.$$

3. megoldás (*Bíró Bálint*)

Legyen a háromszög oldala 2 egység. Használjuk az ábra jelöléseit.



Legyen a BC oldal felezőpontja J.
A Thalész-tétel megfordítása miatt a J pont a BCF háromszög köré írt kör középpontja, ezért

$$JF = BJ = JC = 1.$$

Az BFD háromszög egyenlő szárú és derékszögű, így

$$BF = FD = 1.$$

Az FJC háromszög egyenlő szárú, ezért

$$JFC\sphericalangle = FCJ\sphericalangle = 30^\circ.$$

Az FJD háromszög egyenlő szárú, szárszöge

$$JFD\sphericalangle = 30^\circ,$$

ezért alapon fekvő szöge

$$FDJ\sphericalangle = \frac{180^\circ - 30^\circ}{2} = 75^\circ.$$

Mivel D és J rendre a CE és a CB szakaszok felezőpontjai, ezért DJ középvonal az EBC háromszögben, így párhuzamos a háromszög BE oldalával. Ekkor

$$FEB\sphericalangle = FDJ\sphericalangle = 75^\circ,$$

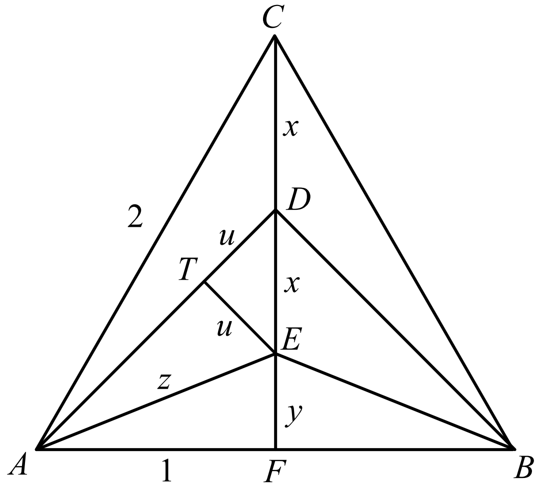
hiszen egyállású szögek.

A kérdezett szög tehát:

$$AEB\sphericalangle = 2 \cdot AEF\sphericalangle = 150^\circ.$$

4. megoldás (*Erdős Gábor*)

Legyen a háromszög oldala 2 egység. Használjuk az ábra jelöléseit.



Az AFC háromszögben a Pitagorasz-tétel miatt

$$CF = 2x + y = \sqrt{3}.$$

az AFD háromszög egyenlő szárú, így

$$DF = x + y = 1,$$

ezért

$$CD = DE = x = \sqrt{3} - 1,$$

és

$$EF = y = \sqrt{3} - 2\left(\sqrt{3} - 1\right) = 2 - \sqrt{3}.$$

az AFE háromszögben a Pitagorasz-tétel miatt

$$AE = z = \sqrt{1 + \left(2 - \sqrt{3}\right)^2} = 2\sqrt{2 - \sqrt{3}}.$$

legyen az E-ből az AD-re bocsátott merőleges talppontja T.
Az ETD háromszögben a Pitagorasz-tétel miatt

$$2u^2 = x^2 = \left(\sqrt{3} - 1\right)^2 = 4 - 2\sqrt{3},$$

vagyis $ET = TD = u = \sqrt{2 - \sqrt{3}}$.
De akkor az AET derékszögű háromszögben

$$AE = 2 \cdot ET,$$

ez tehát egy félszabályos háromszög, amiből következik, hogy

$$DAE\sphericalangle = 30^\circ.$$

Ekkor viszont

$$EAF\sphericalangle = 45^\circ - 30^\circ = 15^\circ,$$

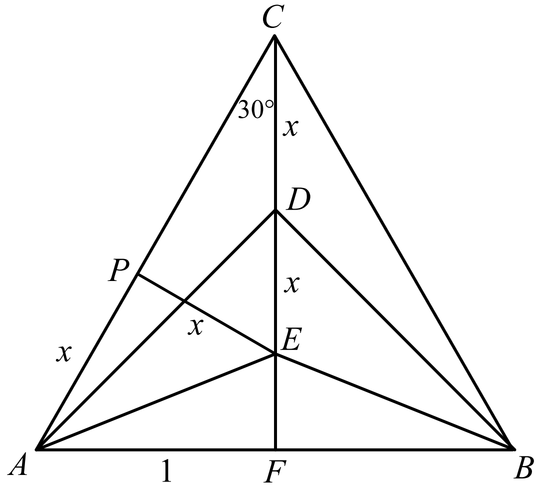
így $AEF\sphericalangle = 75^\circ$.

A kérdezett szög tehát:

$$AEB\sphericalangle = 2 \cdot AEF\sphericalangle = 150^\circ.$$

5. megoldás (*Erdős Gábor*)

Legyen a háromszög oldala 2 egység. Használjuk az ábra jelöléseit.



Az AFC háromszögben a Pitagorasz-tétel miatt

$$CF = 2x + y = \sqrt{3}.$$

Az AFD háromszög egyenlő szárú, így

$$DF = x + y = 1,$$

$$CD = DE = x = \sqrt{3} - 1.$$

Legyen E-ből az AC-re bocsátott merőleges talppontja P. Ekkor CPE félszabályos háromszög, így

$$PE = \frac{CE}{2} = x = \sqrt{3} - 1,$$

$$CP = \sqrt{3}\left(\sqrt{3} - 1\right) = 3 - \sqrt{3},$$

$$AP = 2 - \left(3 - \sqrt{3}\right) = \sqrt{3} - 1 = x.$$

Azt kaptuk, hogy az APE derékszögű háromszögben

$$AP = EP = x = \sqrt{3} - 1,$$

tehát ez a háromszög egyenlő szárú is, ezért alapon fekvő szöge

$$PAE\sphericalangle = 45°.$$

Az AEC háromszög E csúcsnál lévő külső szöge ezért

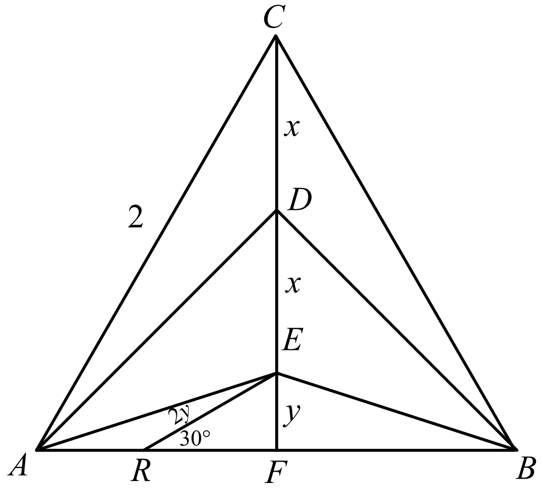
$$AEF\sphericalangle = 30° + 45° = 75°.$$

A kérdezett szög tehát:

$$AEB\sphericalangle = 2 \cdot AEF\sphericalangle = 150°.$$

6. megoldás (*Katz Sándor, Tuza Zsolt*)

Legyen a háromszög oldala 2 egység. Használjuk az ábra jelöléseit.



Az AFC háromszögben a Pitagorasz-tétel miatt

$$CF = 2x + y = \sqrt{3}.$$

Az AFD háromszög egyenlő szárú, így

$$DF = x + y = 1,$$

$$CD = DE = x = \sqrt{3} - 1,$$

$$EF = y = \sqrt{3} - 2\left(\sqrt{3} - 1\right) = 2 - \sqrt{3}.$$

Legyen az R az AF szakasz azon belső pontja, amelyre

$$ERF\sphericalangle = 30^\circ,$$

ekkor az ERF félszabályos háromszögben

$$RE = 2y = 4 - 2\sqrt{3},$$

$$RF = y \cdot \sqrt{3} = 2\sqrt{3} - 3.$$

De akkor

$$AR = 1 - \left(2\sqrt{3} - 3\right) = 4 - 2\sqrt{3} = RE,$$

tehát az ARE háromszög egyenlő szárú, így

$$AER\sphericalangle = \frac{30^\circ}{2} = 15^\circ.$$

Mivel

$$REF\sphericalangle = 60^\circ,$$

ezért

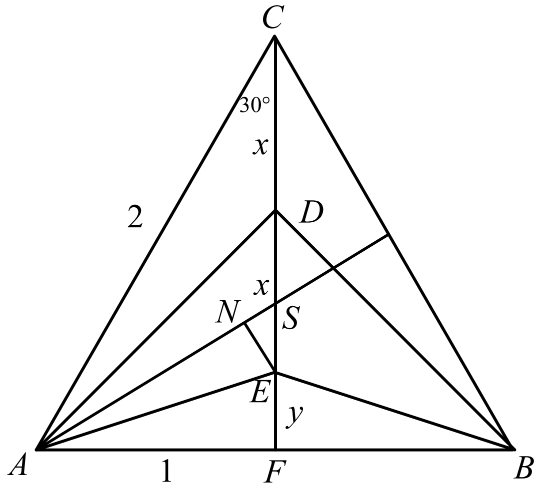
$$AEF\sphericalangle = 15^\circ + 60^\circ = 75^\circ.$$

A kérdezett szög tehát:

$$AEB\sphericalangle = 2 \cdot AEF\sphericalangle = 150^\circ.$$

7. megoldás (*Bíró Bálint*)

Legyen a háromszög oldala 2 egység. Használjuk az ábra jelöléseit.



Az AFC háromszögben a Pitagorasz-tétel miatt

$$CF = 2x + y = \sqrt{3}.$$

Az AFD háromszög egyenlő szárú, így

$$DF = x + y = 1,$$

$$CD = DE = x = \sqrt{3} - 1,$$

$$EF = y = \sqrt{3} - 2\left(\sqrt{3} - 1\right) = 2 - \sqrt{3}.$$

Legyen a háromszög súlypontja S. A súlypont tulajdonságai miatt

$$SF = \frac{CF}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

továbbá

$$AS = \frac{2\sqrt{3}}{3},$$

előbbiből

$$SE = \frac{\sqrt{3}}{3} - \left(2 - \sqrt{3}\right) = \frac{4\sqrt{3} - 6}{3}.$$

Mivel az AFS háromszög félszabályos, így

$$ESN\sphericalangle = 60°,$$

de akkor az ESN is félszabályos háromszög, ezért

$$SN = \frac{SE}{2} = \frac{4\sqrt{3} - 6}{6}.$$

Így viszont

$$AN = \frac{2\sqrt{3}}{3} - \frac{4\sqrt{3} - 6}{6} = 1.$$

az AFE és az ANE háromszögek egybevágóak, hiszen $AN = AF$, AE átfogójuk közös, továbbá mindkettő derékszögű. De akkor A csúcsnál lévő szögeik egyenlők, ezért

$$EAF\sphericalangle = 45° - 30° = 15°,$$

így

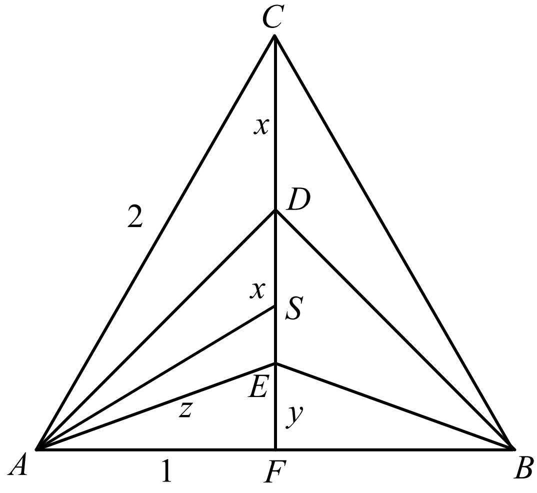
$$AEF\sphericalangle = 75°.$$

A kérdezett szög tehát:

$$AEB\sphericalangle = 2 \cdot AEF\sphericalangle = 150°.$$

8. megoldás (*Erdős Gábor, Katz Sándor*)

Legyen a háromszög oldala 2 egység. Használjuk az ábra jelöléseit.



Az AFC háromszögben a Pitagorasz-tétel miatt

$$CF = 2x + y = \sqrt{3}.$$

Az AFD háromszög egyenlő szárú, így

$$DF = x + y = 1,$$

$$CD = DE = x = \sqrt{3} - 1,$$

$$EF = y = \sqrt{3} - 2\left(\sqrt{3} - 1\right) = 2 - \sqrt{3}.$$

Legyen a háromszög súlypontja S. A súlypont tulajdonságai miatt

$$SF = \frac{CF}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

továbbá

$$AS = \frac{2\sqrt{3}}{3},$$

előbbiből

$$SE = \frac{\sqrt{3}}{3} - \left(2 - \sqrt{3}\right) = \frac{4\sqrt{3} - 6}{3}.$$

ekkor

$$\frac{SE}{EF} = \frac{4\sqrt{3} - 6}{3} : \left(2 - \sqrt{3}\right) = \frac{2\sqrt{3} \cdot \left(2 - \sqrt{3}\right)}{3 \cdot \left(2 - \sqrt{3}\right)} = \frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3} : 1 = \frac{AS}{AF}.$$

szögfelező-tétel megfordítása miatt

$$EAF\sphericalangle = \frac{SAF\sphericalangle}{2} = \frac{30^\circ}{2} = 15^\circ,$$

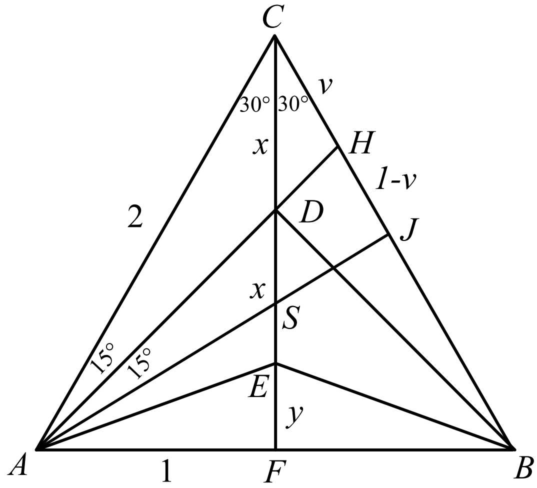
$$AEF\sphericalangle = 75^\circ.$$

A kérdezett szög tehát:

$$AEB\sphericalangle = 2 \cdot AEF\sphericalangle = 150^\circ.$$

9. megoldás (*Bekőné Wekszli Mária*)

Legyen a háromszög oldala 2 egység. Használjuk az ábra jelöléseit.



Az AFC háromszögben a Pitagorasz-tétel miatt

$$CF = 2x + y = \sqrt{3}.$$

Az AFD háromszög egyenlő szárú, így

$$DF = x + y = 1,$$

illetve $AD = \sqrt{2}$, ezért

$$CD = DE = x = \sqrt{3} - 1,$$

$$EF = y = \sqrt{3} - 2\left(\sqrt{3} - 1\right) = 2 - \sqrt{3}.$$

Az AFE háromszögben a Pitagorasz-tétel miatt

$$AE = z = \sqrt{1 + \left(2 - \sqrt{3}\right)^2} = 2\sqrt{2 - \sqrt{3}}.$$

Legyen S a háromszög súlypontja, AD és AS meghosszabbításai metsszék BC-t rendre H és J pontokban, ekkor

$$AJ = \sqrt{3}.$$

Mivel

$$CAH\sphericalangle = 60° - 45° = 15°$$

$$JAH\sphericalangle = 30° - 15° = 15°,$$

ezért AH szögfelező a CAJ háromszögben, tehát a szögfelező-tétel miatt

$$\frac{1-v}{v} = \frac{AJ}{AC} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Az egyenletet megoldva kapjuk, hogy

$$v = 4 - 2\sqrt{3}.$$

Lássuk be, hogy az ADE és a DHC háromszögek hasonlóak. Mindkét háromszög tompaszögű, D csúcsnál mindkettőnek 45 fokos szöge van (melyek csúcsszögek), két megfelelő oldal aránya pedig egyenlő, hiszen:

$$\frac{AE}{AD} = \frac{2\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2 - \sqrt{3}} = \sqrt{4 - 2\sqrt{3}},$$

$$\frac{CH}{CD}=\frac{4-2\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}=\frac{4-2\sqrt{3}}{\sqrt{\left(\sqrt{3}-1\right)^2}}=\frac{4-2\sqrt{3}}{\sqrt{4-2\sqrt{3}}}=\sqrt{4-2\sqrt{3}}.$$

Megjegyzés: két oldal aránya és a kisebbikkel szemközti szög egyenlő, ez mégis elegendő ahhoz, hogy hasonlóak legyenek, hiszen mindkét háromszög tompaszögű.)

Ekkor viszont

$$DAE\sphericalangle=DCH\sphericalangle=30^\circ.$$

A DAE háromszög E csúcsnál lévő külső szöge ezért

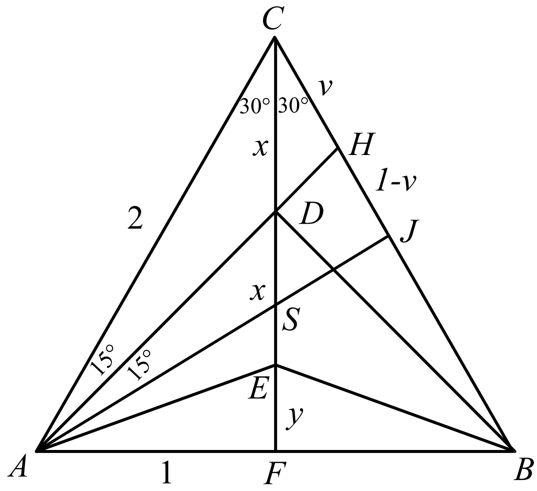
$$AEF\sphericalangle=30^\circ+45^\circ=75^\circ.$$

A kérdezett szög tehát:

$$AEB\sphericalangle=2\cdot AEF\sphericalangle=150^\circ.$$

10. megoldás (*Tuza Zsolt*)

Legyen a háromszög oldala 2 egység. Használjuk az ábra jelöléseit.



Az AFC háromszögben a Pitagorasz-tétel miatt

$$CF = 2x + y = \sqrt{3}.$$

Az AFD háromszög egyenlő szárú, így

$$DF = x + y = 1,$$

$$CD = DE = x = \sqrt{3} - 1,$$

$$EF = y = \sqrt{3} - 2\left(\sqrt{3} - 1\right) = 2 - \sqrt{3}.$$

Legyen S a háromszög súlypontja, AD és AS meghosszabbításai metsszék BC-t rendre H és J pontokban, ekkor $AJ = \sqrt{3}$. Mivel

$$CAH\sphericalangle = 60° - 45° = 15°$$

$$JAH\sphericalangle = 30° - 15° = 15°,$$

ezért AH szögfelező a CAJ háromszögben, tehát a szögfelező-tétel miatt

$$\frac{1-v}{v} = \frac{AJ}{AC} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Az egyenletet megoldva kapjuk, hogy $v = 4 - 2\sqrt{3}$.
Lássuk be, hogy az AEC és a DHC háromszögek hasonlóak. Mindkét háromszögnek 30 fokos szöge van a C csúcsnál, a szomszédos oldalak aránya pedig egyenlő, hiszen:

$$\frac{CE}{CA} = \frac{2x}{2} = \sqrt{3} - 1,$$

illetve

$$\frac{CH}{CD} = \frac{4-2\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1} = \frac{2 \cdot \left(2-\sqrt{3}\right) \cdot \left(\sqrt{3}+1\right)}{\left(\sqrt{3}-1\right) \cdot \left(\sqrt{3}+1\right)} = \frac{2 \cdot \left(\sqrt{3}-1\right)}{2} = \sqrt{3} - 1.$$

Ekkor viszont $CAE\sphericalangle = CDH\sphericalangle = ADF\sphericalangle = 45°$. Az AEC háromszög E csúcsnál lévő külső szöge ezért

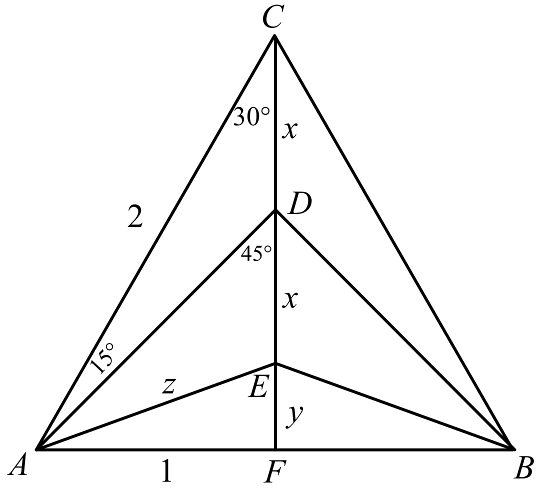
$$AEF\sphericalangle = 30° + 45° = 75°.$$

A kérdezett szög tehát:

$$AEB\sphericalangle = 2 \cdot AEF\sphericalangle = 150°.$$

11. megoldás (*Jánosik Máté, a versenyen adott megoldása*)

Legyen a háromszög oldala 2 egység. Használjuk az ábra jelöléseit.



Az AFC háromszögben a Pitagorasz-tétel miatt

$$CF = 2x + y = \sqrt{3}.$$

Az AFD háromszög egyenlő szárú, így

$$AD = \sqrt{2},$$

$$DF = x + y = 1,$$

$$CD = DE = x = \sqrt{3} - 1,$$

$$EF = y = \sqrt{3} - 2\left(\sqrt{3} - 1\right) = 2 - \sqrt{3}.$$

Az AFE háromszögben a Pitagorasz-tétel miatt

$$AE = z = \sqrt{1 + \left(2 - \sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{2}\sqrt{4 - 2\sqrt{3}} = \sqrt{2}\sqrt{\left(\sqrt{3} - 1\right)^2} = \sqrt{2}\left(\sqrt{3} - 1\right).$$

Lássuk be, hogy az AEC és a DEA háromszögek hasonlóak. Az E csúcsnál lévő szögük közös, a szomszédos oldalak aránya pedig egyenlő, hiszen:

$$\frac{CE}{AE} = \frac{2\left(\sqrt{3} - 1\right)}{\sqrt{2}\left(\sqrt{3} - 1\right)} = \sqrt{2},$$

$$\frac{AE}{DE} = \frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{3} - 1\right)}{\sqrt{3} - 1} = \sqrt{2}.$$

Ekkor viszont

$$EAD\sphericalangle = ECA\sphericalangle = 30°,$$

$$EAF\sphericalangle = 45° - 30° = 15°,$$

ezért

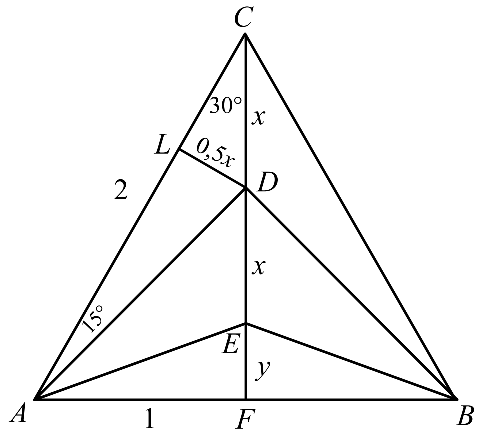
$$AEF\sphericalangle = 75°.$$

A kérdezett szög tehát:

$$AEB\sphericalangle = 2 \cdot AEF\sphericalangle = 150°.$$

12. megoldás (*Tuza Zsolt*)

Legyen a háromszög oldala 2 egység. Használjuk az ábra jelöléseit.



Az AFC háromszögben a Pitagorasz-tétel miatt

$$CF = 2x + y = \sqrt{3}.$$

Az AFD háromszög egyenlő szárú, így

$$DF = x + y = 1,$$

$$CD = DE = x = \sqrt{3} - 1,$$

$$EF = y = \sqrt{3} - 2\left(\sqrt{3} - 1\right) = 2 - \sqrt{3}.$$

Legyen a D-ből AC-re állított merőleges talppontja L. Ekkor a DCL háromszög félszabályos, ezért

$$DL = \frac{x}{2} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2},$$

$$CL = \frac{\sqrt{3} - 1}{2} \cdot \sqrt{3} = \frac{3 - \sqrt{3}}{2}.$$

De akkor

$$AL = 2 - \frac{3 - \sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3} + 1}{2}$$

Lássuk be, hogy az ADL és az AEF háromszögek hasonlóak. Mindkét háromszög derékszögű, megfelelő befogóik aránya pedig egyenlő, hiszen:

$$\frac{DL}{AL} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2} : \frac{\sqrt{3} + 1}{2} = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1} = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1} \cdot \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} + 1} = \frac{4 - 2\sqrt{3}}{2} = \frac{2 - \sqrt{3}}{1} = \frac{EF}{AF}.$$

Mivel a két háromszög hasonló, így megfelelő szögei egyenlőek, tehát

$$EAF\sphericalangle = DAL\sphericalangle = 15^\circ,$$

ezért

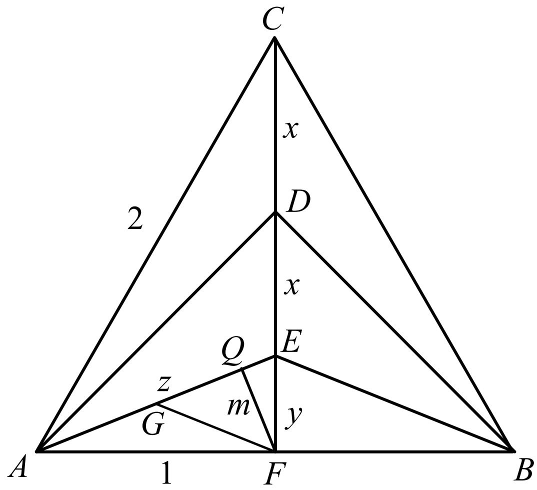
$$AEF\sphericalangle = 75^\circ.$$

A kérdezett szög tehát:

$$AEB\sphericalangle = 2 \cdot AEF\sphericalangle = 150^\circ.$$

13. megoldás (*Erdős Gábor, Katz Sándor, Szoldatics József*)

Legyen a háromszög oldala 2 egység. Használjuk az ábra jelöléseit.



Az AFC háromszögben a Pitagorasz-tétel miatt

$$CF = 2x + y = \sqrt{3}.$$

Az AFD háromszög egyenlő szárú, így

$$DF = x + y = 1,$$

$$CD = DE = x = \sqrt{3} - 1,$$

$$EF = y = \sqrt{3} - 2\left(\sqrt{3} - 1\right) = 2 - \sqrt{3}.$$

Az AFE háromszögben a Pitagorasz-tétel miatt

$$AE = z = \sqrt{1 + \left(2 - \sqrt{3}\right)^2} = 2\sqrt{2 - \sqrt{3}}.$$

Legyen az F-ből az AE-re bocsátott merőleges talppontja Q. Az AFE háromszög területét kétféleképpen felírva

$$\frac{AE \cdot m}{2} = \frac{AF \cdot FE}{2},$$

$$FQ = m = \frac{AF \cdot FE}{AE} = \frac{1 \cdot \left(2 - \sqrt{3}\right)}{2 \cdot \sqrt{2 - \sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2} = \frac{2 \cdot \sqrt{2 - \sqrt{3}}}{4} = \frac{z}{4}.$$

Az AFE derékszögű háromszög átfogóhoz tartozó magassága negyede az átfogónak. Egy ismert feladathoz jutottunk. A Thalész-tétel megfordítása miatt ugyanis az AFE háromszög köré írt kör középpontja az AE oldal Gfelezőpontja, ezért $GF = \frac{z}{2}$. Mivel $QF = \frac{GF}{2}$, ezért a GFQ háromszög félszabályos, $QGF\sphericalangle = 30°$. Ez a szög az AFG egyenlő szárú háromszög G csúcsnál lévő külső szöge, ezért

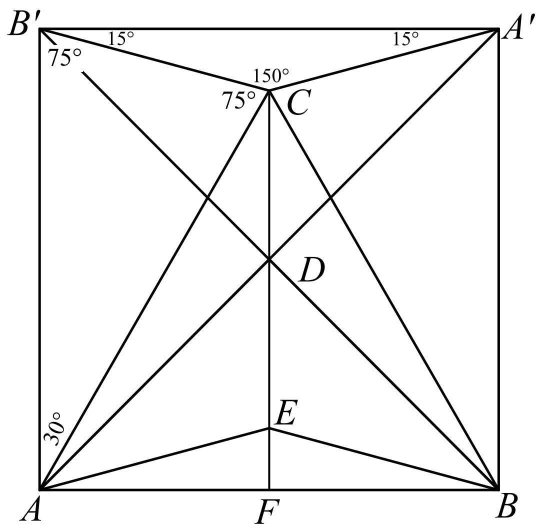
$$EAF\sphericalangle = \frac{30°}{2} = 15°,$$

$$AEF\sphericalangle = 75°.$$

A kérdezett szög tehát:

$$AEB\sphericalangle = 2 \cdot AEF\sphericalangle = 150°.$$

14. megoldás (*Szoldatics József*)



Tükrözzük az ABE háromszöget a D pontra. Ekkor az E tükörképe C.
Az így kapott $ABA'B'$négyszög egy négyzet, hiszen átlói merőlegesek és egyenlő hosszúak. A négyzet belsejében pedig az ABC szabályos háromszög - ismert feladathoz jutottunk!

$$CAB'\sphericalangle = 90° - 60° = 30°,$$

továbbá az ACB' háromszög egyenlő szárú, így

$$AB'C\sphericalangle = \frac{180° - 30°}{2} = 75°.$$

de akkor

$$CB'A'\sphericalangle = 90° - 75° = 15°.$$

Szimmetria-okokból a $B'CA'$ háromszög egyenlő szárú, így

$$CA'B'\sphericalangle = 15°,$$

ezért

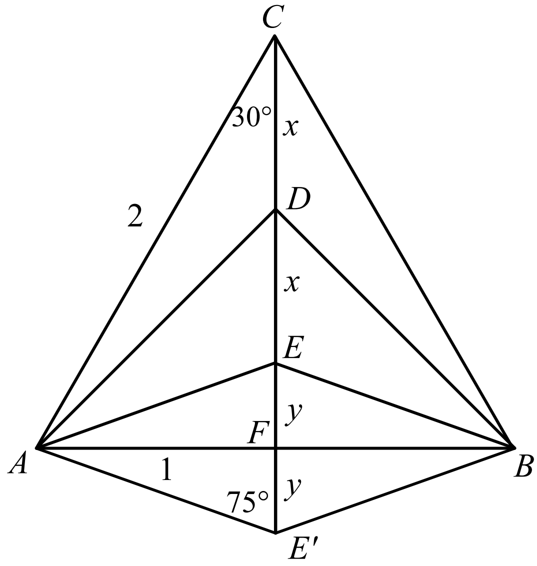
$$B'CA'\sphericalangle = 180° - 2 \cdot 15° = 150°.$$

A keresett szög ennek a szögnek a tükörképe a D pontra nézve, így

$$AEB\sphericalangle = 150°.$$

15. megoldás (*Ábrahám Gábor, Róka Sándor*)

Legyen a háromszög oldala 2 egység. Használjuk az ábra jelöléseit.



Legyen az E pont tükörképe az AB oldal egyenesére E'.
Mivel az AFD háromszög egyenlő szárú, ezért

$$DF = x + y = 1,$$

ekkor viszont

$$CE' = 2x + 2y = 2 = AC.$$

Megtudtuk, hogy az $AE'C$háromszög egyenlő szárú, szárszöge $ACE'\sphericalangle = 30°$, így

$$AE'C\sphericalangle = \frac{180° - 30°}{2} = 75°.$$

Ennek a szögnek a tükörképe

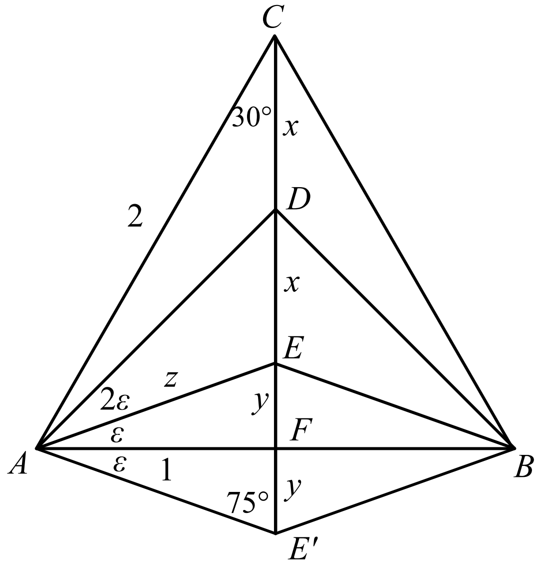
$$AEF\sphericalangle = 75°.$$

A kérdezett szög tehát:

$$AEB\sphericalangle = 2 \cdot AEF\sphericalangle = 150°.$$

16. megoldás (*Bekőné Wekszli Mária*)

Legyen a háromszög oldala 2 egység. Használjuk az ábra jelöléseit.



Az AFC háromszögben a Pitagorasz-tétel miatt

$$CF = 2x + y = \sqrt{3}.$$

Az AFD háromszög egyenlő szárú, így

$$DF = x + y = 1,$$

$$CD = DE = x = \sqrt{3} - 1,$$

$$EF = y = \sqrt{3} - 2\left(\sqrt{3} - 1\right) = 2 - \sqrt{3}.$$

Az AFE háromszögben a Pitagorasz-tétel miatt

$$AE = z = \sqrt{1 + \left(2 - \sqrt{3}\right)^2} = 2\sqrt{2 - \sqrt{3}}.$$

Legyen az E pont tükörképe az AB oldal egyenesére E'. Tekintsük a következő arányokat:

$$\frac{EE'}{ED} = \frac{2y}{x} = \frac{2\left(2 - \sqrt{3}\right)}{\sqrt{3} - 1} = \frac{2\left(2 - \sqrt{3}\right) \cdot \left(\sqrt{3} + 1\right)}{\left(\sqrt{3} - 1\right) \cdot \left(\sqrt{3} + 1\right)} = \sqrt{3} - 1 = \sqrt{\left(\sqrt{3} - 1\right)^2} = \sqrt{4 - 2\sqrt{3}}.$$

$$\frac{AE'}{AD} = \frac{2\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{\sqrt{2}} = \sqrt{4 - 2\sqrt{3}} = \sqrt{\left(\sqrt{3} - 1\right)^2} = \sqrt{3} - 1,$$

Szögfelező-tétel megfordítása miatt AE szögfelező az $AE'D$ háromszögben. Az ábra jelöléseit használva $3\epsilon = 45°$, ezért $EAF\sphericalangle = \epsilon = 15°$, tehát

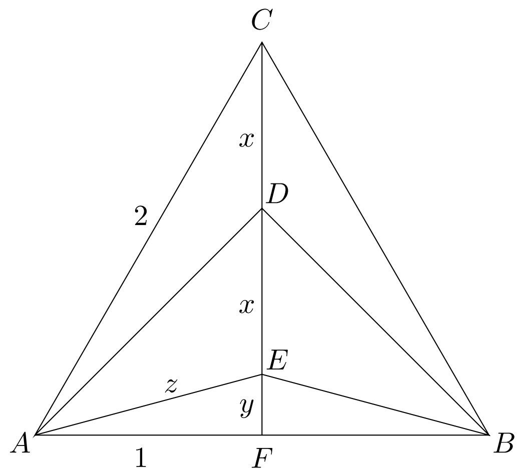
$$AEF\sphericalangle = \epsilon = 75°.$$

A kérdezett szög tehát:

$$AEB\sphericalangle = 2 \cdot AEF\sphericalangle = 150°.$$

17. megoldás (*Ábrahám Gábor*)

Legyen a háromszög oldala 2 egység. Használjuk az első ábra jelöléseit.



1. ábra

Az AFC háromszögben a Pitagorasz-tétel miatt

$$CF = 2x + y = \sqrt{3}.$$

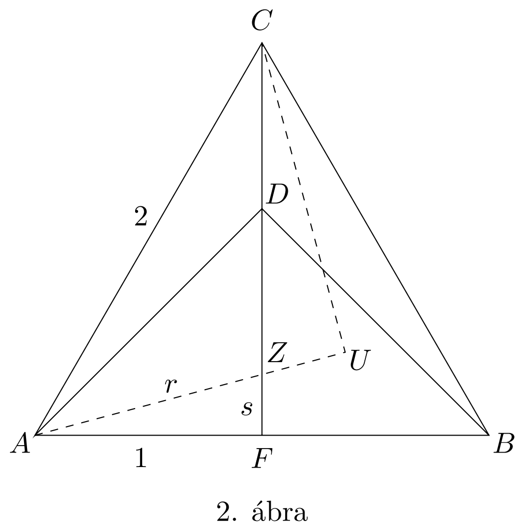
az AFD háromszög egyenlő szárú, így

$$DF = x + y = 1,$$

$$CD = DE = x = \sqrt{3} - 1,$$

$$EF = y = \sqrt{3} - 2\left(\sqrt{3} - 1\right) = 2 - \sqrt{3}.$$

Most vegyük fel az U pontot úgy, hogy az AUC háromszög is egyenlő szárú és derékszögű legyen, továbbá jelöljük az AU és a CF szakaszok metszéspontját Z-vel.



2. ábra

Legyen $AZ = r$ és $FZ = s$.

(*Megjegyzés:* azt is mondhatjuk, hogy az ABD háromszöget elforgatjuk a háromszög S súlypontja körül -120 fokkal.)

Az AFZ és a CUZ háromszögek hasonlóak, mert van két egyenlő szögük: mindkettő derékszögű, és Z csúcsnál lévő szögeik csúcsszögek. Mivel az AF szakasznak a másik háromszögben a CU felel

meg, $AF = 1$ és $CU = \sqrt{2}$, így a hasonlóság aránya $\sqrt{2}$.
Ekkor $ZU = \sqrt{2}s$ és $CZ = \sqrt{2}r$. Felírható a következő két egyenlet:

$$r + \sqrt{2}s = \sqrt{2}$$

$$\sqrt{2}r + s = \sqrt{3}.$$

Ennek a megoldása s-re nézve $s = 2 - \sqrt{3}$. De akkor

$$FZ = 2 - \sqrt{3} = FE,$$

vagyis Z pont egybeesik az E ponttal. Mivel

$$EAF\sphericalangle = ZAF\sphericalangle = 60^\circ - 45^\circ = 15^\circ,$$

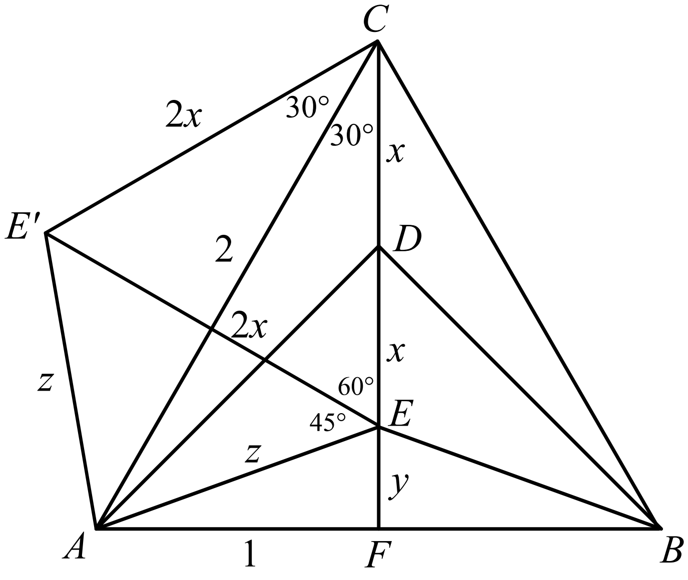
így $AEF\sphericalangle = 75^\circ$.

A kérdezett szög tehát:

$$AEB\sphericalangle = 2 \cdot AEF\sphericalangle = 150^\circ.$$

18. megoldás (*Szoldatics József*)

Legyen a háromszög oldala 2 egység. Használjuk az ábra jelöléseit.



Az AFC háromszögben a Pitagorasz-tétel miatt

$$CF = 2x + y = \sqrt{3}.$$

az AFD háromszög egyenlő szárú, így

$$DF = x + y = 1,$$

$$CD = DE = x = \sqrt{3} - 1,$$

$$EF = y = \sqrt{3} - 2\left(\sqrt{3} - 1\right) = 2 - \sqrt{3}.$$

az AFE háromszögben a Pitagorasz-tétel miatt

$$AE = z = \sqrt{1 + \left(2 - \sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{2}\sqrt{4 - 2\sqrt{3}} = \sqrt{2}\sqrt{\left(\sqrt{3} - 1\right)^2} = \sqrt{2}\left(\sqrt{3} - 1\right).$$

Legyen az E pont tükörképe az AC oldalra nézve E'.
Az ECE' háromszög szabályos,

$$EE' = 2x = 2\left(\sqrt{3} - 1\right).$$

Az AEE' háromszögben

$$AE^2 + (AE')^2 = 2z^2 = 4\left(\sqrt{3} - 1\right)^2 = \left(2\left(\sqrt{3} - 1\right)\right)^2 = (EE')^2,$$

ezért ez a háromszög a Pitagorasz-tétel megfordítása miatt derékszögű. Mivel egyenlő szárú is, ezért

$$AEE' \sphericalangle = 45°.$$

Mivel az

$$AEC \sphericalangle = 60° + 45° = 105°,$$

ezért az

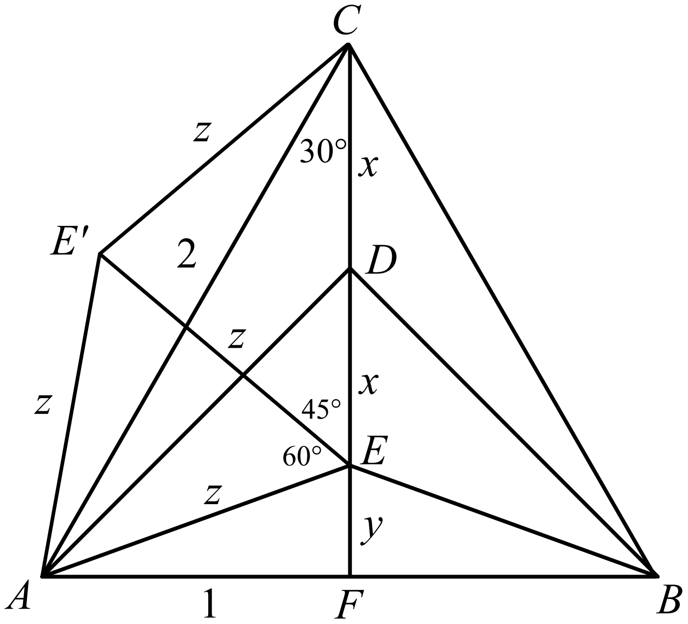
$$AEF \sphericalangle = 180° - 105° = 75°.$$

A kérdezett szög tehát:

$$AEB \sphericalangle = 2 \cdot AEF \sphericalangle = 150°.$$

19. megoldás (*Szoldatics József*)

Legyen a háromszög oldala 2 egység. Használjuk az ábra jelöléseit.



Az AFC háromszögben a Pitagorasz-tétel miatt

$$CF = 2x + y = \sqrt{3}.$$

az AFD háromszög egyenlő szárú, így

$$DF = x + y = 1,$$

ezért

$$CD = DE = x = \sqrt{3} - 1,$$

$$EF = y = \sqrt{3} - 2\left(\sqrt{3} - 1\right) = 2 - \sqrt{3}.$$

z AFE háromszögben a Pitagorasz-tétel miatt

$$AE = z = \sqrt{1 + \left(2 - \sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{2}\sqrt{4 - 2\sqrt{3}} = \sqrt{2}\sqrt{\left(\sqrt{3} - 1\right)^2} = \sqrt{2}\left(\sqrt{3} - 1\right).$$

forgassuk el az ABE háromszöget 60 fokkal az A pont körül.

Legyen az E pont elforgatottja E'. Az AEE' háromszög szabályos,

$$EE' = z = \sqrt{2}\left(\sqrt{3} - 1\right).$$

A $CE'E$ háromszögben

$$\left(CE'\right)^2 + \left(AE'\right)^2 = 2z^2 = 4\left(\sqrt{3} - 1\right)^2 = \left(2\left(\sqrt{3} - 1\right)\right)^2 = (2x)^2 = CE^2,$$

ezért ez a háromszög a Pitagorasz-tétel megfordítása miatt derékszögű. Mivel ez a háromszög egyenlő szárú is, ezért

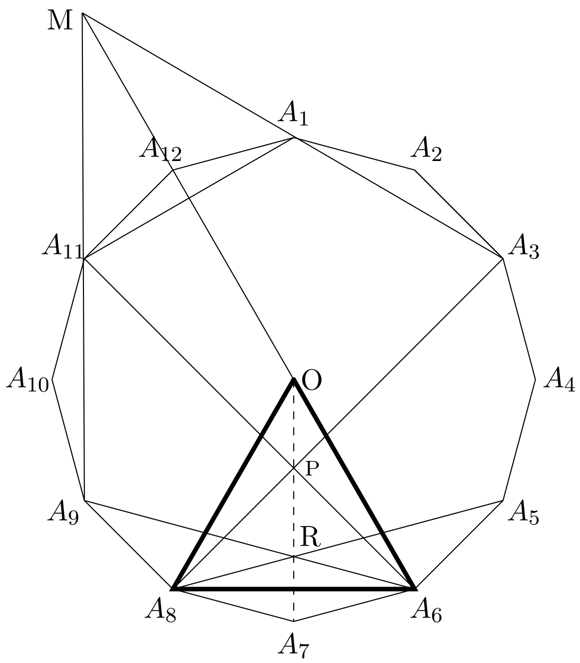
$$E'EC\sphericalangle = 45°.$$

Mivel az $AEC\sphericalangle = 60° + 45° = 105°$, ezért az $AEF\sphericalangle = 180° - 105° = 75°$. A kérdezett szög tehát:

$$AEB\sphericalangle = 2 \cdot AEF\sphericalangle = 150°.$$

20. megoldás (*Szoldatics József*)

Tekintsük az $A_1A_2...A_{12}$ szabályos sokszöget, amelynek középpontja O pont.



Az $A_{11}A_6$ szakasz O körüli 90 fokos elforgatottja az A_8A_3 szakasz, így ez a két szakasz merőleges. Mivel az említett két szakasz egymás tükörképe az OA_7 egyenesre, így P metszéspontjuk illeszkedik a tükörtengelyre, tehát

$$A_8PA_6\sphericalangle = 90°.$$

Hasonlóan az A_9A_6 szakasz O körüli 30 fokos elforgatottja az A_8A_5 szakasz, így ennek a két szakasznak a hajlásszöge 30°. Mivel az említett két szakasz egymás tükörképe az OA_7 egyenesre, így R metszéspontjuk illeszkedik a tükörtengelyre, tehát $A_5RA_6\sphericalangle = 30°$, azaz

$$A_8RA_6\sphericalangle = 150°.$$

Mivel $A_1A_3A_5A_7A_9A_{11}$ egy szabályos hatszög, ezért minden oldala egyenlő a köré írt kör sugarával (r), továbbá belső szögei 120 fokosak, tehát az $A_{11}A_1M$ háromszög szabályos, ezért

$$MA_{11} = r.$$

Az $OA_{11}A_9A_7$ négyszög rombusz, mivel minden oldala r hosszúságú, ezért szemközti oldalai, A_9A_{11} és A_7O párhuzamosak. Ez viszont azt jelenti, hogy egy A_6 középpontú kicsinyítéssel az MA_{11} szakasz képe lehet az OP szakasz, akkor a vele egyenlő hosszú A_9A_{11} szakasz képe ugyanezen kicsinyítés során az RP szakasz, így

$$OP = RP.$$

Mivel $A_8OA_6\sphericalangle = 60°$, így megjelent az ábrán a feladatban szereplő valamennyi pont és vonal: legyen $A_8 = A$, $A_6 = B$, $O = C$, $P = D$, $R = E$.

A kérdezett szög tehát:

$$AEB\sphericalangle = A_8RA_6\sphericalangle = 150°.$$

Megjegyzés: Természetesen a megoldás során tett állítások kerületi és középponti szögek tételére való hivatkozással is indokolhatók.