MICROPROF Tanárverseny 2009
Megoldásvázlatok középiskolai tanárok részére

1. $4+4\cdot 2=12$, a többi 16. E

2. Ha egy szám 6-os maradéka 0, 1, 2, 3, 4, 5, akkor négyzetéé rendre 0, 1, 4, 3, 4, 1. C

3. A módusz és a medián 7, így az átlag is. Ehhez $x=9$ kell. E

4. Külső lap oldalai 1, 2, 19, 20, következőé 3, 4, 17, 18, majd 5, 6, 15, 16. C

5. Az értékek 3, 7, 31, 63 és 127. D

6. Differenciák 7 és 9, legkisebb közös többszörös 63, következő közös elem $2009+63=2072$. E

7. A lehetséges oldalak 2, 3, 4 vagy 2, 4, 5 vagy 3, 4, 5. B

8. Nem tudjuk, mikor hazudott. De aznapról nem mondhatja, hogy hazudik. D

9. A kis négyzet területe $\frac{1}{9}$ rész, a többinek a fele szürke, azaz $\frac{8}{9}:2=\frac{4}{9}$ rész. A

10. $4^x+4^x+4^x+4^x=4\cdot 4^x=4^{x+1}=4^{16}$, azaz $x=16-1=15$. E

11. Minden kockalapot 4 gúla-oldallapra cserélünk, így $6\cdot 4=24$ lapú testet kaptunk. B

12. Turbó 12 km-t 3 óra alatt tesz meg, így Villámléptű 1,5 óra alatt. Ennyivel később induljon. A

13. 8 órakor a szög 120º. 6 perc alatt a kismutató 36º-ot, a kicsi 3º-ot tesz meg, azonos irányba. C

14. A Melbourne-i óra $11+21=32$ órával mutatott többet érkezéskor, mint a londoni induláskor.
Ez éppen 1 nap és 8 óra. C

15. Az oldalakkal párhuzamos, a csúcsokon és az oldalfelező pontokon átmenő vonalakkal szabályos háromszögrácsot rajzolhatunk. A 24 háromszögből 9 lesz szürke. C

16. A 2 nem szerepelhet köztük.
A következő prímek 3, 5, 7, 11, így a legkisebb, ami szóba jöhet, a $3+5+11=19$.
De a 19 csak így írható. A következő jó: $3+7+13=5+7+11=23$. E

17. $A+B=5500 \Rightarrow C+D=9500$. Mivel $C+A=6500$, ezért $D-A=9500-6500=3000$. B

18. Mivel a medencehosszak aránya 5:4, így a 63 nap $\frac{4}{9}$ részét úszta a hosszabb fedettben. B

19. Vegyük sorra a neveket, és ellenőrizzük, hány állítás igaz. E

20. Az *n* páratlan, hisz előjele plusz.
Az összeg csoportosítható: $1+(-2+3)+(-4+5)+...+\left[-\left(n-1\right)+n\right]=\frac{n+1}{2}=2009$. E

21. Az ötszög szögei 108, a hatszögé 120 fokosak. Közös részük ötszög, szögösszege 540º.
Ennek két szöge 108º, kettő pedig 120º, így $x=540°-2\cdot\left(108°+120°\right)=84°$. B

22. Ha a táblát 45º-kal elforgatjuk, a probléma könnyebben áttekinthető.
Az átlókra, melyek egyszínűek, ugyanolyan színű korongok kerülnek.
Elég kiválasztani azokat az átlókat, melyekre alapszínűkkel azonos színű korong kerül. B

23. Ha akár 4-et is lehetne cserélhetni, akkor a végén a csapat $2\cdot 5\cdot 5\cdot 3=150$-féle lehetne.
Ebből nem valósulhat meg az, amihez 4 csere kellene, $1\cdot 4\cdot 4\cdot 2=32$ ilyen csapat van. B

24. A csak egy halmazba írt számokat egyszer, a kettő metszetébe írtakat kétszer, a 6-ot háromszor számoljuk, ha az egyes halmazokba írt számok összegét összegezzük.

Ha a két halmaz metszetébe írt három szám összegét m-mel, a keresett összeget h-val jelöljük, akkor az $1+2+3+4+5+7+m+18=3h$, azaz $40+m=3h$ egyenlethez jutunk.
Tudjuk, hogy $1+2+3=6\le m\le 16=4+5+7$, azaz $46\le 3h\le 56$. Ebből h lehet 16, 17 és 18.
A 17-re nem adható konstrukció, a másik kettőre igen. B

25. $\dfrac{n^2-9}{n-1}=\dfrac{(n+1)\cdot(n-1)-8}{n-1}=n+1-\dfrac{8}{n-1}$. Ez akkor egész, ha n-1 osztója a 8-nak.
A 8-nak 4 pozitív osztója van, illetve ezek ellentettjei, ennek a 8 számnak az összege 0.
Mivel ezek az n-1-ek voltak, a lehetséges n-ek összege 8. E

26. Ha a középsőt és a három csúcsnál lévőt elvesszük, az nyilván megfelel a feltételeknek.
Két szomszédosat nem lehet elvenni, hiszen amelyikkel ők érintkeznek, az elcsúszhatna.
Ha nem ezt a 4-et vesszük el, akkor el kellene venni valamelyik él két középsőjének egyikét.
Ennek 4 szomszédja ezek után nem mozdítható. A többi 5 közül 4 egy él mentén van,
az ötödik ezek közül kettővel egy szabályos háromszöget alkot.
Ebből a háromszögből legfeljebb egy vehető el, az él mentén maradó két szomszédosból szintén csak egy, így ebben az esetben csak 3 érmét tudunk elvenni. D

27. A nullák számát az 5-ös prímtényezők száma adja. 24! Így 4 nullára végződik, 25! Pedig 6-ra.
Tehát semelyik faktoriális nem végződhet 5 darab nullára.
A kimaradó k értékek: 5, 11, 17, 23, 29, 30 (124! végén 28, 125!-én 31 db), 36, 42, 48. D

28. QOR háromszög egyenlőszárú és derékszögű. Innen a kis félkör sugara $\sqrt{2}$.
Az OQUR negyedkör területéhez a kis félkörét hozzáadjuk,
majd az OQR háromszögét levonjuk: $\dfrac{2^2\cdot\pi}{4}+\dfrac{\left(\sqrt{2}\right)^2\cdot\pi}{2}-\dfrac{2\cdot 2}{2}=2\pi-2$. A

29.
$$\frac{1}{\sqrt{2009+\sqrt{2009^2-1}}}=\frac{1}{\sqrt{2009+\sqrt{2010\cdot 2008}}}=\frac{1}{\sqrt{1005+1004+2\cdot\sqrt{1005\cdot 1004}}}=$$
$$\frac{1}{\sqrt{\left(\sqrt{1005}+\sqrt{1004}\right)^2}}=\frac{1}{\sqrt{1005}+\sqrt{1004}}\cdot\frac{\sqrt{1005}-\sqrt{1004}}{\sqrt{1005}-\sqrt{1004}}=\sqrt{1005}-\sqrt{1004}$$
A

30. Minden helyiértéken 0 vagy 1 szerepelhet, azaz összesen $2^7=128$ szám írható fel.
Párosítsuk minden számhoz az „inverzét”: pl. 1001011-hez 0110100-t.
Minden párban összesen 7 db 1-es lesz, a párok száma pedig 128 fele, azaz 64. C