




Matematika játékosan – játékok matematikusan

Erdős Gábor

Nagykanizsa, Batthyány Lajos Gimnázium

Honlap: www.microprof.hu



Miért játszunk a matekórán?

- Tananyag és/vagy kompetencia?
- Érdeklődés felkeltése, jó hangulat
- Matematika alkalmazhatósága
- Felfedezés – sejtés – bizonyítás – alkalmazás
- Algoritmikus gondolkodás
- Mindenkinek élményt nyújt

Nekem nincs erre időm, így sem végzek a tananyaggal!

Érettségi magyar, de akár matek tételek: Ezért kár volt ennyi ideid iskolába járni.

NEM!

Egyre inkább nem a tananyag a lényeg, hanem a képesség, ami kialakult.

Nem az út a fontos nem, hanem a végcél! Nem az, hogy hol megyünk, hanem hogy hova érünk. Ehhez sok út vezet. Unalmasak is, meg érdekesek is.

Nem biztos, hogy érdemes trigonometrikus egyenletrendszereket gyakoroltatni orrvérséig. Tudjon gondolkodni! Ebből sok minden tanítható játékokkal.

Nemzetközi mérés: az érettségikor mit kellene tudni, ebből mit tud, és ebből mi marad meg 10, 20 év múlva. Siralmas!

AMIBŐL MEGMARAD VALAMI, AZ ARRA SZÁNT IDŐ NEM VOLT ELFECSEÉRELT!


A fáradt, unott, fásult diákok felélednek, élet tölti meg a termet.

Pl.: csoportmunka indítása: keresd meg a többieknél a Te törteddel egyenlő értékűt!

Ez is játék, bár csak másodperceket vesz el.

A kutatás módszerét mutatja meg, nem készen kapja az információt: próbálkoznak, sejtéseket fogalmaznak meg, kísérleteznek, bizonyítanak, alkalmaznak.

Ügyesen el lehet rejteni benne a matematikát. Nem nyilvánvaló, hogy a matematika mely terület kell használni. Nem marad ki a fontos lépés, a modellezés, a matematizálás. Rámutat a matematika hasznosságára.



Bachet játéka - és társai

- **Bachet, 1612:**
 - Az egyik játékos mond egy 10-nél nem nagyobb egész számot. Utána felváltva mondanak egész számokat, amely nagyobb, mint amennyit az ellenfél mondott, de legfeljebb 10-zel. Az nyer, aki kimondja a 100-at.
 - Veszítő helyzetek: 100, 89, 78, ..., 34, 23, 12, 1. (11-es maradéka 1)
- **Kivonós játék:**
 - N gyufaszál, felváltva vesznek el, legfeljebb MAX darabot. Az nyer, aki utoljára lép.
 - Betli játék: az veszít, aki utoljára lép.

Fogalmak tisztázása:

állás, helyzet (kezdő, vég)

lépés


vesztő állás

nyerő stratégia

Rákmódszer: honnan tud 100-at mondani? 99, 98, ..., 90. Így 89-ről bármit mond, arra jó válasz a 100. (Ketten együtt 11-gyel növelik...)

Analógia: a kivonós játék ua., mint Bachet

Betli játék: úgy játszom, mintha nem a 0, hanem az 1 lenne a cél. Veszítő helyzetek: 1-gyel nagyobbak: 1, 7, 13, 19, 25, 31



Szervezési lehetőségek

- Edzés párokban, bajnokság másnap
- Szimultán, figyelje meg, hogyan nyerek
- Szimultán, aki legyőz, jutalmat kap
- Páros verseny
 - felváltva lépnek
 - egyik edző, másik játszik
- Csapatverseny
- Feladványok: te jössz, mit lépnél?
- Paraméteres problémák

Párokból játszható, mint edzés, következő órán bajnokság!

Szimultán ad a tanár, és alkalmazza a nyerő stratégiát. A gyerek találja ki, miért nyer mindig a tanár.

Rá kell jönni a nyerő stratégiára, de nem kell még megfogalmazni!

Következő órán ellenem játszhat, az első 3 győztes ötöst kap.

Párosok játszanak egymás ellen. Megbeszélhetik, de a pár két tagja felváltva lép, ha sorra kerülnek.

Párok játszanak. Az egyik az edző, az elején adhat taktikai utasítást, de utána a másik játssza végig.

Meg kell fogalmazni a nyerő stratégiát!!!

Csapatverseny, 3-4-5 fős csapatok, 1. tábla, 2. tábla, ..., a gyerekek osztják be egymás között!
Kommunikáció, csapatépítés, önismeret, -bizalom és -kritika, másik tudásának megbecsülése

Paraméteres problémák előkészítése: fogok mondani néhány (N, MAX) számpárt, add meg a nyerő kezdőlépést.

... $(x-1)=2x+3$ Kisegér megrágtá. 5 perc múlva megmondom, milyen szorzó állt ott, az első hármát díjazom. PL.: 0, 2, 4



Pénzforgatós játékok

- Az asztalon N db pénzérme fekszik egy sorban. Egy lépés során megfordítunk egy fejet és tőle jobbra mindegyik érmét. Az nyer, akinek a lépése után mindegyik pénzérmén az írás lesz felül.
- Véget ér-e a játék?

Pénzforgatós játék – egy sor

●	●	●	●	●	1	0	0	0	1	17
●	●	●	●	●	0	1	1	1	0	14
●	●	●	●	●	0	1	0	0	1	9
●	●	●	●	●	0	0	1	1	0	6
●	●	●	●	●	0	0	0	0	1	1
●	●	●	●	●	0	0	0	0	0	0

Írni az állásokat egymás alá, sok parti, megfigyelés

Lényeg: nézd csak az utolsó oszlopot!

Ennek színe mindig változik!

NINCS stratégia, a kezdőállapot meghatározza a győztest!

Minden nyerő állásból csak veszítőbe lehet lépni, és veszítő állásból csak nyerő állásba.

Véget ér-e a játék?

Kettes számrendszer: végtelen leszállítás.

Állapotfüggvény: fontos az algoritmusok elemzéséhez! 2 fő eset: invariancia és monoton változás.

Több sor esetén?

Pénzforgató játék – több sor

●	●	●	●	●	●	●
●	●	●	●	●	●	●
●	●	●	●	●	●	●
●	●	●	●	●	●	●
●	●	●	●	●	●	●
●	●	●	●	●	●	●
●	●	●	●	●	●	●
●	●	●	●	●	●	●

- Kezdőállás:
az utolsó oszlopban 3 piros – páratlan
- Állapotfüggvény:
pirosak paritása minden lépésben változik
- Végállapot:
az utolsó oszlopban 0 piros – páros
- Az nyer, aki kezd

Újabb módosítás: Nem kell minden tőle jobbra lévőt megfordítani, csak azokat, amiket akarunk

Két sor esetén: szimmetrián alapuló játék, első lépésben tegyük egyformává a két sort, majd TÜKÖRMÓDSZER

Több sor esetén? Nem ugyanaz, mert nem kell hogy minden lépésben forduljon az utolsó érme.

Lehet, hogy az utolsó oszlopban a piros korongok száma nem is változik!

Pénzforgatós – „kis” módosítás

Az ábrán a fejet pirossal, az írást kékkel jelöltük.

A gyerekek alsós matekkorongjai jól használhatók, jobban átlátható!

Ugyanezt kell nézni, mint az előbbi változatban, de nem biztos, hogy a végén mindig változik.

De a végállásban minden oszlopban páros sok fej kell legyen!

Balról az első olyan oszlopot keressük meg, amiben pti sok fej van. Ilyen pl. a 3. oszlop, ahol 3 fejet látunk.

Egy ilyen fejet megfordítok, legyen például az alsó, majd ebben a sorban úgy haladok, hogy minden oszlopban páros sok fej legyen.

A sárgával jelölt mezőkön lévő érmékhez nyúlhatok hozzá.

Most minden oszlopban páros sok fej, azaz piros korong van. Ezt az ellenfél mindig elrontja, mi pedig helyreállítjuk.

Itt is alkalmazzuk a kettes számrendszert, ami az előbb már sokat segített: 8 szám, amik közül az egyiket csökkenthetjük bármennyivel.

Ez nem más, mint a jól ismert NIM játék.



NIM és analóg játékok

- N kupacos NIM játék ($N = 2, 3, \dots$)
- Moore NIM
- Buborék (2, 3, 4, több buborékkal)
- Újabb pénzforgató változat
- Northcott – sakk

Nem érdemes lelőni a poént, nagyon jó kis verseny rendezhető.

Gyűjtsd a vesztes helyzeteket. (módszer: feladványok! Pl. 1,3,4 – mi a nyerő lépés; 1,2,3 miért vesztes – a játék gráfja)

ANALÓGIA: ha a kupacok elemszámát átírom kettes számrendszerbe, akkor ez az előző 2. módosítás!

Moore NIM: N kupac van, $K < N$, egyszerre K kupacból lehet elvenni, ugyanannyit.

Pl.: $K=2$. NIM összeadás 3-as számrendszerben. Vesztes: ha ez az összeg 0.

Pl.: 0010110

 1011101 ehhez először

 1101010 ehhez kell még nyúlnom, vagy egy nullát 1-re írni.

 1110010

Össz: 0202201, azaz nyerő. Le kell nullázni. Tetszőleges 0-val kell indulnom a 2. oszlopból.

A következő változtatandó számjegy 1-es, és az összegben 2 van: ezt és a másik 1-et nullázom.

Esetek 2-ből vagy 1-ből kell nulla, és az aktuális számban 11, 01 vagy 00 áll. Mind megoldható.

Ugyanez a helyzet $K=3, 4, \dots$ esetén.

Elég, ha megmondom a stratégiát, majd...

1. alkalmazza

2. magyarázzuk meg, miért működik mindig.

Buborék: N bábu, minden mezőn csak 1 bábu állhat, bármelyikkel léphet jobbra, de nem előzhet.

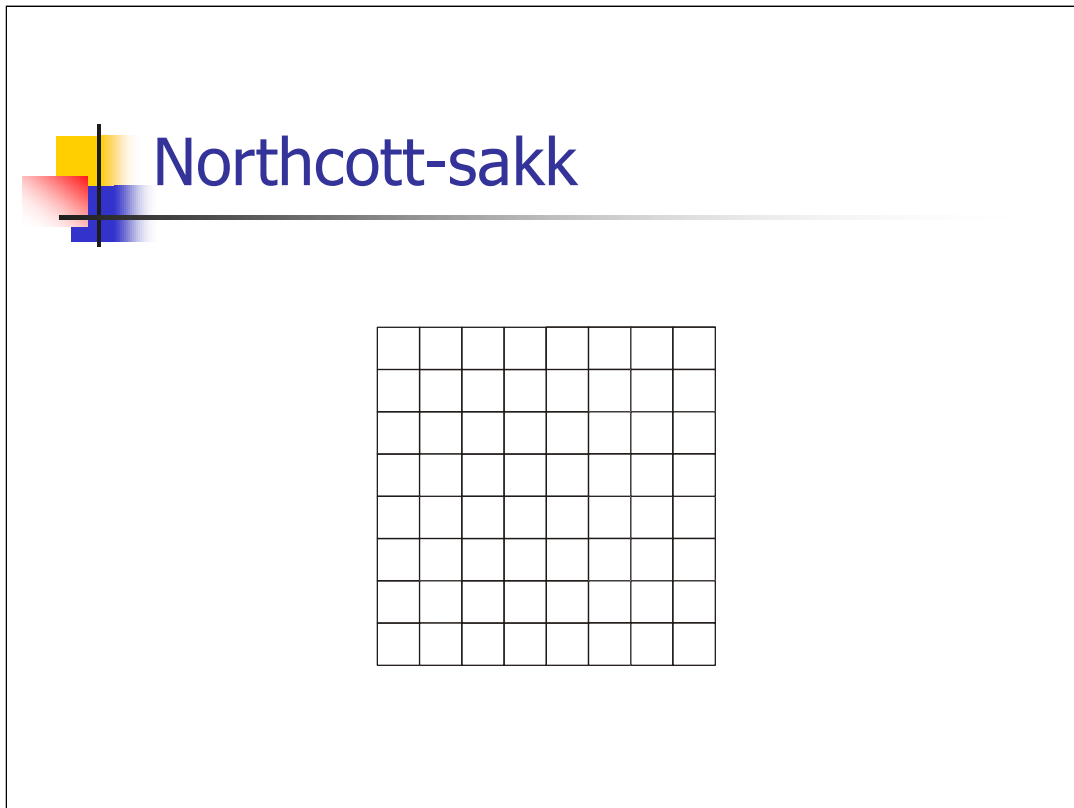
$N=2$: 1 kupac! Utolérem, majd ha halad, megint.

$N=3$: 2 kupacos NIM. Egyik kupac: balról 1. és 2. között, másik a 3. és a pálya vége között.

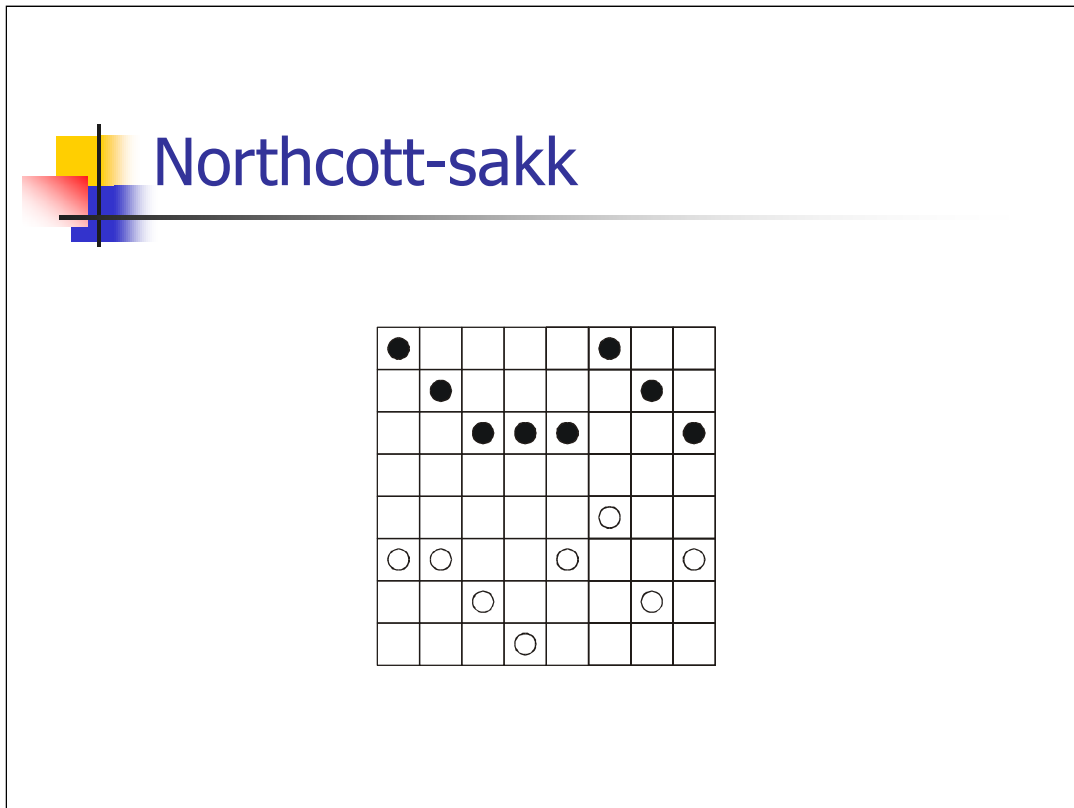
$N=4$: Ugyanez, csak a 4. lesz a 2. kupac vége.

$N=5, 6$: 3 kupacos NIM

Pénzforgató: megfordíthat egy fejet, és ha akar, tőle balra egy tetszőleges érmét.

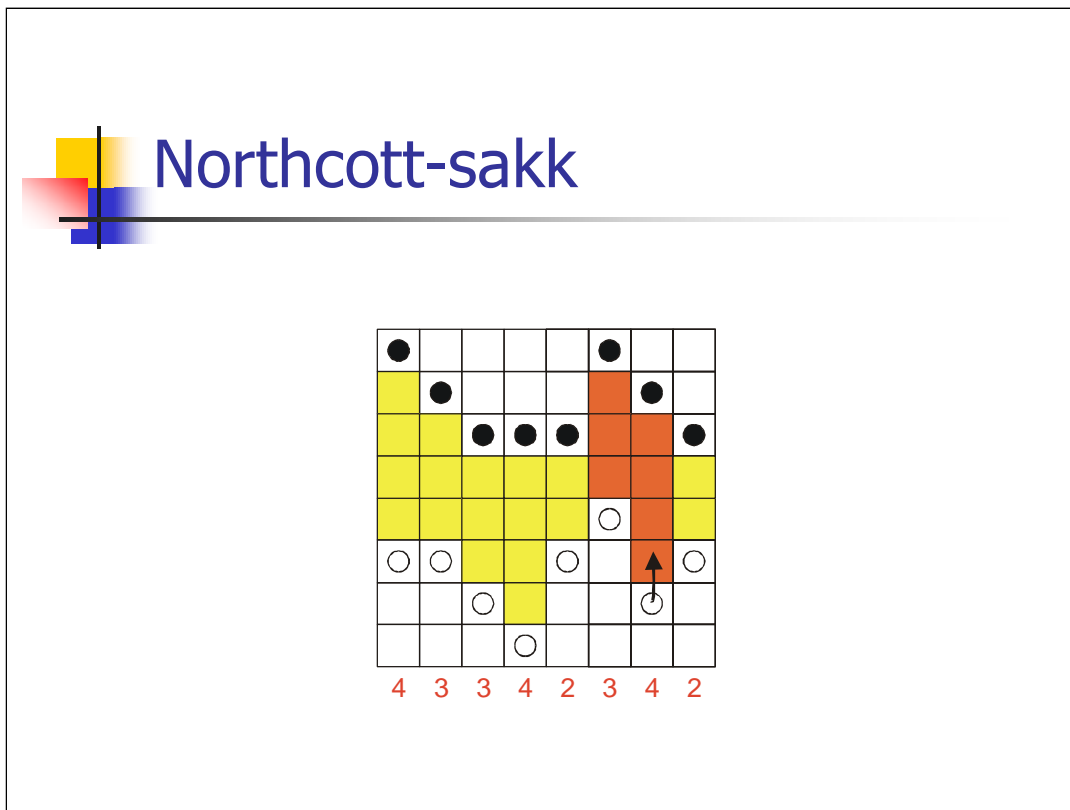


Egy sakktáblán középen teszünk egy paravánt. Mindkét fél feltesz 8 gyalogot, minden oszlopban egyet!



Világos kezd. Egyik bábuval bármennyit léphet előre vagy hátra, de nem ütheti le és nem lépheti át a másik bábuját.

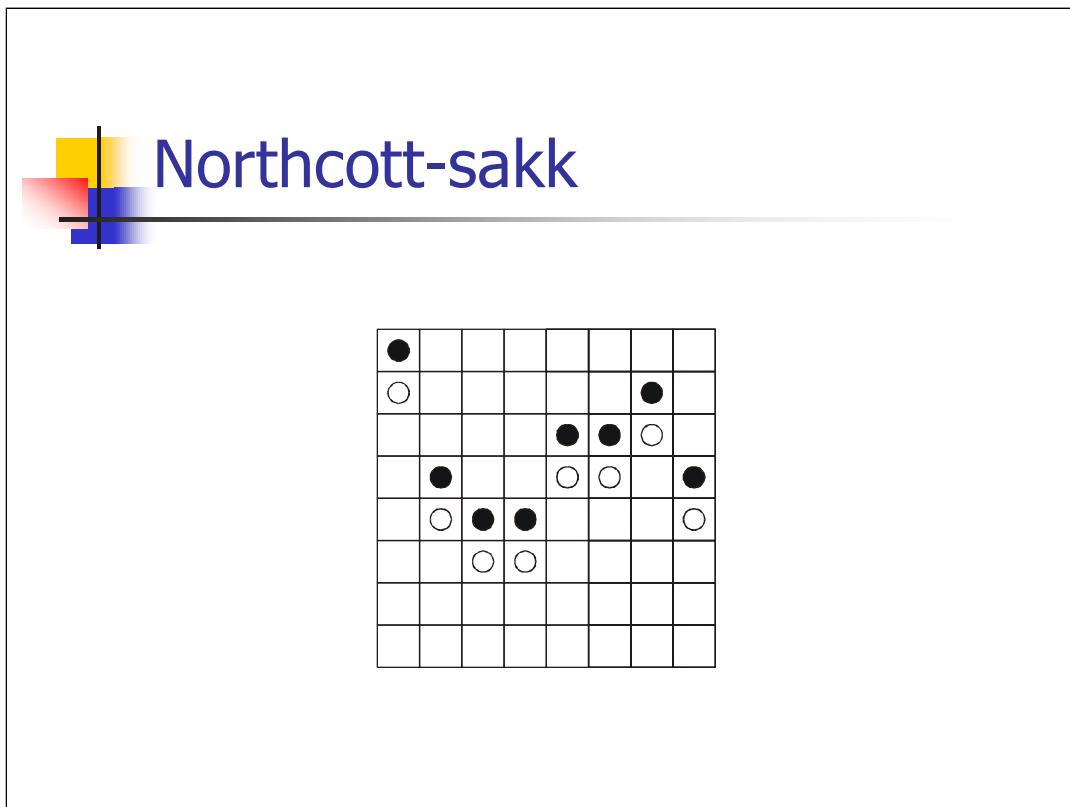
Az veszít, aki nem tud lépni.



8 kupacos NIM, az elemszámok alul olvashatók. A sárga részek figyelmen kívül hagyhatók, 4-4, 3-3, 2-2 párok.

A piros igazán 2 kupacos NIM, egyenlítsük ki, majd utánozzunk.

Játsszunk le egy NIM játékot és nyerjük meg. Ha az ellenfél hátrálással növeli a kupacot, menjünk ugyanannyit utána.



Igazából véget ért a játék, sötét már csak hátrálni tud, mi meg beszorítjuk az alapvonalára.



Osztójáték

- A és B felváltva mondják a 72 azon osztóit, amelyek 72-nél kisebbek. Ha egy osztó elhangzott, akkor annak az osztóit már nem szabad mondani.

9	18	36	72
3	6	12	24
1	2	4	8

Írjuk fel az osztókat, hogy lássuk, mi után mi jöhet még!

Balra felezek, lefele harmadolok.

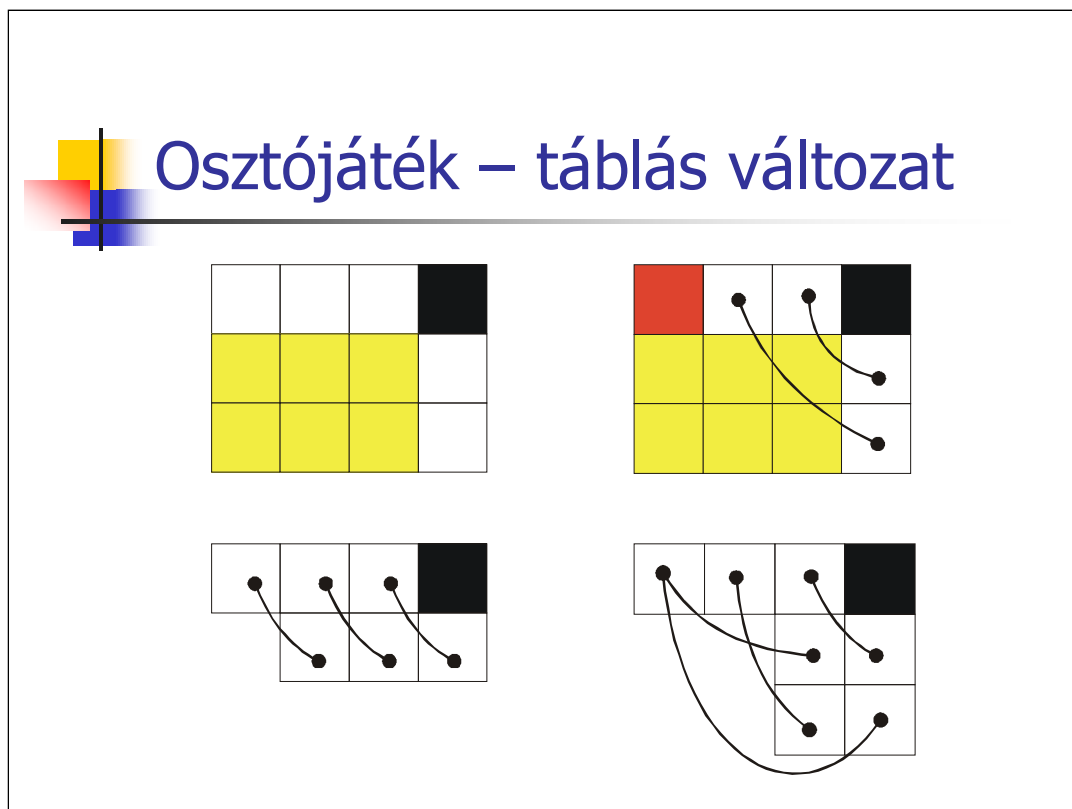
Mindegyik szám osztói balra, lefelé. Ezeket zárja ki.

Miért ennyi mező? Prímfelbontás miatt 3-szor felezhetek, 2-szer harmadolhatok.

– osztók száma $4 \times 3 = 12$.

Mi van, ha valaki pl. a 12-t mondja?

Hagyjuk a számokat, rakjunk bábukat a táblára!



A sárga mezők lettek elfoglalva. Mire mi a válasz?

Ha a pirosat lépi, két szimmetrikus lába lesz, T használható.

Másik érdekes alakzat a „sánta rabló”. Igazából ez is tükörmódszer. Persze, lehet függőleges is.

Nyerő indulás tehát a 6. Különben **B** nyerhet!

Osztójáték – számok rajza

1	3	9	27	81
---	---	---	----	----

4	20	100
2	10	50
1	5	25

- Más számokkal
- 60: térbeli játék
- Osztók száma
- 210: hiperkocka!
- Csapj oda játék: ismerd fel a szám alakját!

Más számoknak is készítsük el a rajzát, táblázatba foglalva az osztókat.

Kezdetben: 1 vagy 2 prímosztó.

Aztán 3 prímosztó, itt már térbeli.

Írjuk fel mindig a prímfelbontást, majd mellé, hogy hány mező, kocka... építi fel a szám alakját.

Cél, hogy maga jöjjön rá az osztók számának összefüggésére.

4 prím: 4 dimenziós alakzat! Legyenek az osztók pontok, így az élváz lerajzolható!

Asztalra tegyünk néhány rajzot, számok nélkül. A játékvezető mond egy számot, és pl. 4 ember közül ki csap rá először a szám rajzára? Aki az első, kap 1 pontot. Aki rosszra csap, elveszít 1-et.

Versenyt rendezhetünk, elődöntő, döntő. Mennyivel érdekesebb, mint gyakorolni a prímfelbontást...

Játékkaszinó: betanítani néhány embert a nyerő stratégiára (vagy kiadni, jöjjön rá.)

3-6 játékot elmondani a játékosoknak.

Van 1 órája, mindegyik játékvezetőnél max. 3 próba és 3 éles játékot játszhat. (Játékvezető írja.)

Éles játéknál mondhat tetszőleges tétet a vagyonából, ha veszít, elbukta, ha nyer, megduplázza.

Ki gyűjt nagyobb vagyont a játékidő végéig?



Mastermind - számjegyekkel

- A: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 számkártyákból alkot egy négyjegyű számot
- B: tippel, ki akarja találni
- A: mond két számot:
 - Hány számjegy helyes?
 - Hánynak a helyiértéke helyes?
- Addig folytatják, míg B ki nem találja a gondolt számot



Mastermind – egy mintajáték

<ul style="list-style-type: none"> ■ A: 1965 ■ A válasza: 2 1 ■ 2718 2 0 ■ 1846 3 1 ■ 1685 3 3 ■ 4685 3 2 ■ 1485 4 4 	<p>B tippje: 2164</p>
---	-----------------------

Fontos megértetni a szabályokat.

Koncentráció javító bemelegítés: ha A ezt gondolta, B ezt tippelte, mit kell válaszolni A-nak?


Mi lehet a gondolt szám?

Jó feladványokat lehet adni: otthonra, óra eleji bemelegítésre, szakkör elejére, órai differenciálásra.

Egész szép feladvány, kivárni, mi a megoldás!!!

Versenyt lehet rendezni feladványokból, egyénit és csapatot egyaránt!

Csapatverseny nem csak szakkörön, órán is! (Pataki János, Kavics Kupa)



Mastermind - kombinatorika

- 44 1 tipp
- 43 0 tipp – nem lehet!
- 42 6 tipp
- 41 $4 \cdot 2 = 8$ tipp
- 40 9 tipp
- 4x típusú összesen $4! = 24$ tipp

42: melyik 2 marad a helyén? A másik kettő egyértelműen helyet cserél

41: melyik van jó helyen: 4 eset, a többi kétféleképpen lehet rossz helyen mind.

40 ötlet: ültessük le asztalhoz őket. Minden szám mellé jobbról üljön az, aki az ő eredeti, természetes helyén áll.

Pl.: 2341 ültetésben 1 mellé 2, mellé 3, mellé 4, egy asztalhoz kerültek.

Pl.: 2143 esetén egyik asztal 12, másik 34.

Hány ültetés van?

Egy asztal esetén a 4 elem ciklikus permutációinak a száma, azaz $3! = 6$,

Két asztal esetén azt kell kiválasztani, ki ül 1-gyel közös asztalhoz, 3 eset.

Összesen 9.

Vagy: 24-ből az eddigiek.

Ajándékozási probléma, senki se húzza a saját nevét.

5 ember esetén: kenguru feladat.


Így megoldva: egy asztalnál $4! = 24$ eset, két asztalnál $(5 \text{ alatt a } 2) \times 2! = 10 \times 2 = 20$ eset, összesen 44 eset.

Táblázattal: lásd a következő lapon

Ajándékozási probléma

	1	2	3	4	5
0	0	1	2	9	
1	1	0	3	8	
2		1	0	6	
3			1	0	
4				1	0
5					1
Össz	1	2	6	24	120

	1	2	3	4	5
0	0	1	2	9	44
1	1	0	3	8	45
2		1	0	6	20
3			1	0	10
4				1	0
5					1
Össz	1	2	6	24	120



Mastermind - kombinatorika

- **33** $4 \cdot 4 = 16$ tipp
- **32** $6 \cdot 2 \cdot 4 = 48$ tipp
- **31** $4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 4 = 144$ tipp
- **30** $21 \cdot 3$ $2 \cdot 13$ 231^* $23 \cdot 1$
 312^* $31 \cdot 2$ $3 \cdot 12$ $3 \cdot 21$
 $*123$ $*312$ $*321$
- $4 \cdot 4 \cdot 11 = 176$ tipp

33: melyik helyen áll rossz szám: 4, mi áll ott: 4

32: 4-ből melyik 2 jó helyen: 6, másik 2 közül melyik van, de rossz helyen: 2, végül a rossz mi: 4

31: melyik 3 jó: 4, ebből melyik jó helyen: 3, másik 2 jó számjegy hol áll: 3 (132^* , $13 \cdot 2$, $1 \cdot 23$), mi áll a csillag helyén: 4

30: Legyen a 3 jó számjegy az 123, akkor 11 eset.

Melyik 3 jó: 4, mi a negyedik: 4, elhelyezkedés 11



Mastermind - kombinatorika

- 22 $6 \cdot 4 \cdot 3 = 48$ tipp
- 21 $6 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 3 = 288$ tipp
- 20 $6 \cdot 7 \cdot 4 \cdot 3 = 504$ tipp
- 11 $4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 96$ tipp
- 10 $4 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 288$ tipp
- Egy táblázatban rögzíthető:
gyakorisági táblázat
- Valószínűségi eloszlás

22: 4-ből 2 jó: 6, másik 4-ből a maradék helyekre, balról jobbra 2 rosszat: 4×3

21: 2 jó: 6, melyik a helyén: 2, a másik hol: 2, a maradék helyekre, balról jobbra 2 rosszat: 4×3

20: 2 jó: 6, hogy tud rossz helyen állni: 7 (felírható, mint az előbb a 11), a a maradék helyekre, balról jobbra 2 rosszat: 4×3

Fontos: az esetek módszeres összeszedése nagyon fontos, nem csak matematikában használatos kompetencia. A mérések alapján nagyon nem megy! Erősíteni kell.

11: melyik jó, jó helyen: 4, maradék helyekre itt 3 kell: $4 \times 3 \times 2 = 24$

10: melyik jó: 4, ez hol: 3, maradék helyekre itt 3 kell: $4 \times 3 \times 2 = 24$

Oszlopdigramm, kördiagramm: mire való az EXCEL?

