Algoritmusok, rekurziók

NMMV (5-8.), 2019, Lakitelek

Erdős Gábor

erdosgaborkanizsa@gmail.com

www.microprof.hu

NMMV2019, 6. osztály 4. feladat b) kérdés

Feladat: Az erdei manók falujában 40-nél kevesebben élnek, mindegyikük milliméterben mért magassága egy-egy pozitív egész szám. Jenő és Rezső a faluban lakó manók. Jenőnél nincs alacsonyabb manó, Rezsőnél pedig nincs magasabb a faluban. A manók átlagmagassága Rezső nélkül mm, Jenő nélkül mm. Milyen magas lehet Rezső?

Állapotfüggvény → keressük az értékkészletét

Tipikus hiba: csak a minimumot és a maximumot adják meg

Közte sok érték lehetséges → nehéz mindre adni konstrukciót

Adok egy algoritmust, amivel el lehet jutni ezekhez

Előtte: 29 manó, Rezső nélkül 4165 mm, Jenő nélkül 4188 mm

$R = J + 23$ → Rezső min 150, Jenő max 148 → Rezső max 171

NMMV2019, 6. osztály 4. feladat b) kérdés

Jenő	2.	3.	4.	5.	6.	7.		13.	14.	15.	16.	17.		27.	28.	Rezső
127	149	149	149	149	149	149		149	150	150	150	150		150	150	150
128	149	149	149	149	149	149		149	149	150	150	150		150	150	151
129	149	149	149	149	149	149		149	149	149	150	150		150	150	152
130	149	149	149	149	149	149		149	149	149	149	150		150	150	153
141	149	149	149	149	149	149		149	149	149	149	149		149	150	164
142	149	149	149	149	149	149		149	149	149	149	149		149	149	165
143	148	149	149	149	149	149		149	149	149	149	149		149	149	166
144	148	148	149	149	149	149		149	149	149	149	149		149	149	167
147	148	148	148	148	149	149		149	149	149	149	149		149	149	170
148	148	148	148	148	148	149		149	149	149	149	149		149	149	171

NMMV2019, 7. osztály 8. feladat

Feladat: Egy futóversenyen mind a 75 induló célba ért. Holtverseny nem volt, vagyis az 1.; 2.; 3.; …; 74.; 75. helyezések mindegyikét pontosan egy versenyző szerezte meg. A verseny előtt minden induló megtippelte, hogy hányadikként fog célba érni. Mindannyian mondtak egy-egy 0-nál nagyobb, 76-nál kisebb egész számot, amelyek összege pontosan 2019 volt. Hányan lehettek azok a versenyzők, akik eltalálták a saját helyezésüket?

Belátható: maximum 62 találhatta el

Lássuk be, hogy a számuk lehet 61, 60, 59, …, 2, 1, 0 is.

Itt is konstrukció adására használtunk algoritmust.

NMMV2019, 7. osztály 8. feladat

1.	2.	3.	4.		57.	58.	59.	60.	61.	62.	63.	64.		73.	74.	75.
1	2	3	4		57	58	59	60	61	62	54	1		1	1	1
1	2	3	4		57	58	59	60	61	61	54	1		1	1	2
1	2	3	4		57	58	59	60	62	61	54	1		1	1	1
1	2	3	4		57	58	59	59	62	61	54	1		1	1	2
1	2	3	4		57	58	60	59	62	61	54	1		1	1	1
1	2	3	4		57	57	60	59	62	61	54	1		1	1	2
1	2	3	4		58	57	60	59	62	61	54	1		1	1	1
1	2	3	4		58	57	60	59	62	61	54	1		1	1	1
1	2	3	3		58	57	60	59	62	61	54	1		1	1	2
1	2	4	3		58	57	60	59	62	61	54	1		1	1	1
1	1	4	3		58	57	60	59	62	61	54	1		1	1	2
2	1	4	3		58	57	60	59	62	61	54	1		1	1	1

NMMV2016, 6. osztály 3. feladat

Feladat: Petinek van 4 fehér és 23 zöld színű, 1 cm élhosszúságú kis kockája, amelyekből (az összeset felhasználva) a lehető legtöbb napon keresztül minden nap összerakott egy-egy 3 cm élhosszúságú kockát. Az egyetlen feltétel az volt az összerakásra, hogy semelyik nap sem készíthetett olyan kockát, amelynek felületén ugyanannyi négyzetcentiméter a zöld színű területek együttes nagysága, mint valamelyik korábbi napon. Az első kockát május elsején rakta össze. Melyik napon készítette az utolsót?

Csúcskocka: 3 lapja látszik   Élkocka: 2 lapja látszik

Lapkocka: 1 lapja látszik   Belső kocka: 0 lapja látszik

Zöld minimum: $1 \cdot 0 + 3 \cdot 1 = 3$, maximum $4 \cdot 3 = 12$.

NMMV2016, 6. osztály 3. feladat

	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
belső	1									
lap	3	4	3	2	1					
él			1	2	3	4	3	2	1	
csúcs							1	2	3	4
zöld	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

NMMV2019, 8. osztály 7. feladat

Feladat: Amikor a hét törpe leült egy kerek asztalhoz, Hófehérke elhatározta, hogy mindegyikük fejére tesz egy-egy piros, sárga, kék vagy zöld sapkát. Kuka rögtön kikönyörögte, hogy ő mindenképpen piros sapkát kapjon. Abban minden törpe egyetértett, hogy az egymás mellett ülők különböző színű sapkát kapjanak. Hányféleképpen tudta Hófehérke kiosztani a sapkákat a feltételeknek megfelelően?

Jelszó: Kezdjük kicsivel! → rekurzív módszer

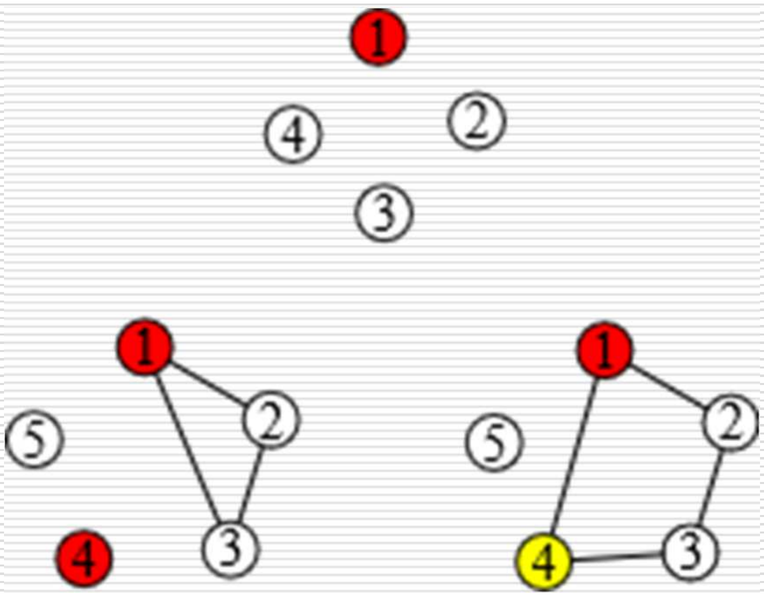
Látta már: hatványok végződése, periodikus sorozatok, stb.

Programozás és matematika erősítik egymást:

- már 5-6. osztályosok is megértik, sőt!
- teljes indukciót nagyban előkészíti

NMMV2019, 8. osztály 7. feladat

3 törpe: 3·2 = 6 eset
4. törpe: ha 3 piros, akkor 9 eset,
ha 3 nem piros, akkor 12 eset;
összesen 21 eset.
5 törpe: ha 4 piros, akkor 5 lehet
3-féle, többi 3 jó úgy, 6-féle;
ha 4 nem piros, akkor 5 lehet
2-féle, többi 4 jó, így 21-féle;
összesen 3·6 + 2·21 = 60 eset.



Folytatva: 6 törpére 3·21 + 2·60 = 183 eset;
végül 7 törpére 3·60 + 2·183 = 546 eset.

NMMV2018, 7. osztály 8. feladat b) kérdés

Feladat: Egy emeletes ház minden emeletét pirosra, fehérre vagy zöldre festették. Tudjuk, hogy nincs három olyan közvetlenül egymás fölött lévő emelet, amelyeknek mindegyikét fehérre festették. Hányféleképpen lehet kifesteni a házat a szabályoknak megfelelően, ha az emeletek száma 7?

Módszer ugyanaz, mint az előbb.

Legyen s(n): az n emeletes ház megfelelő színezéseinek a száma; kérdés: s(7)=? Tekintsünk most egy 7 emeletes szállodát, és bontsuk esetekre a felső emeletek színe szerint.

Fontos: ez a programozó gondolkodás: visszafelé lépünk

A matematikai lényeget is könnyebb így megérteni!

NMMV2018, 7. osztály 8. feladat b) kérdés

Felső emelet piros vagy zöld: alatta egy szabályos, 6 emeletes ház, ez tehát $2 \cdot s(6)$ eset.

Felső emelet fehér, alatta nem fehér: $2 \cdot s(5)$ eset.

Felső 2 emelet fehér, így alatta nem fehér: $2 \cdot s(4)$ eset.

Kaptuk: $s(7)=2 \cdot (s(6)+s(5)+s(4))$

Valójában: $s(n)=2 \cdot (s(n-1)+s(n-2)+s(n-3))$

Ugyanez használható, ha n értéke 6, 5 vagy 4.

Kezdeti értékek: $s(1)=3$, $s(2)=3 \cdot 3=9$ és $s(3)=3 \cdot 3 \cdot 3-1=26$.

Innen $s(4)=2 \cdot (26+9+3)=76$, $s(5)=2 \cdot (76+28+9)=222$, $s(6)= 2 \cdot (222+76+28)=648$, végül $s(7)= 2 \cdot (648+222+76)=1892$.

NMMV2018, 7. osztály 4. feladat b) kérdés

Feladat: Egy szabályos dobókocka hat lapjára az 1, 2, 3, 4, 5, 6 számokat írtuk. A kockával egymás után többször dobunk, és a dobások eredményét összeadjuk. Akkor állunk meg, amikor a dobott számok összege nagyobb lesz 7-nél. Hány különböző dobássorozatot követően kaphatjuk összegként a 10-et?

Hasonló az előzőhöz, mégis más: algoritmussal oldom meg.

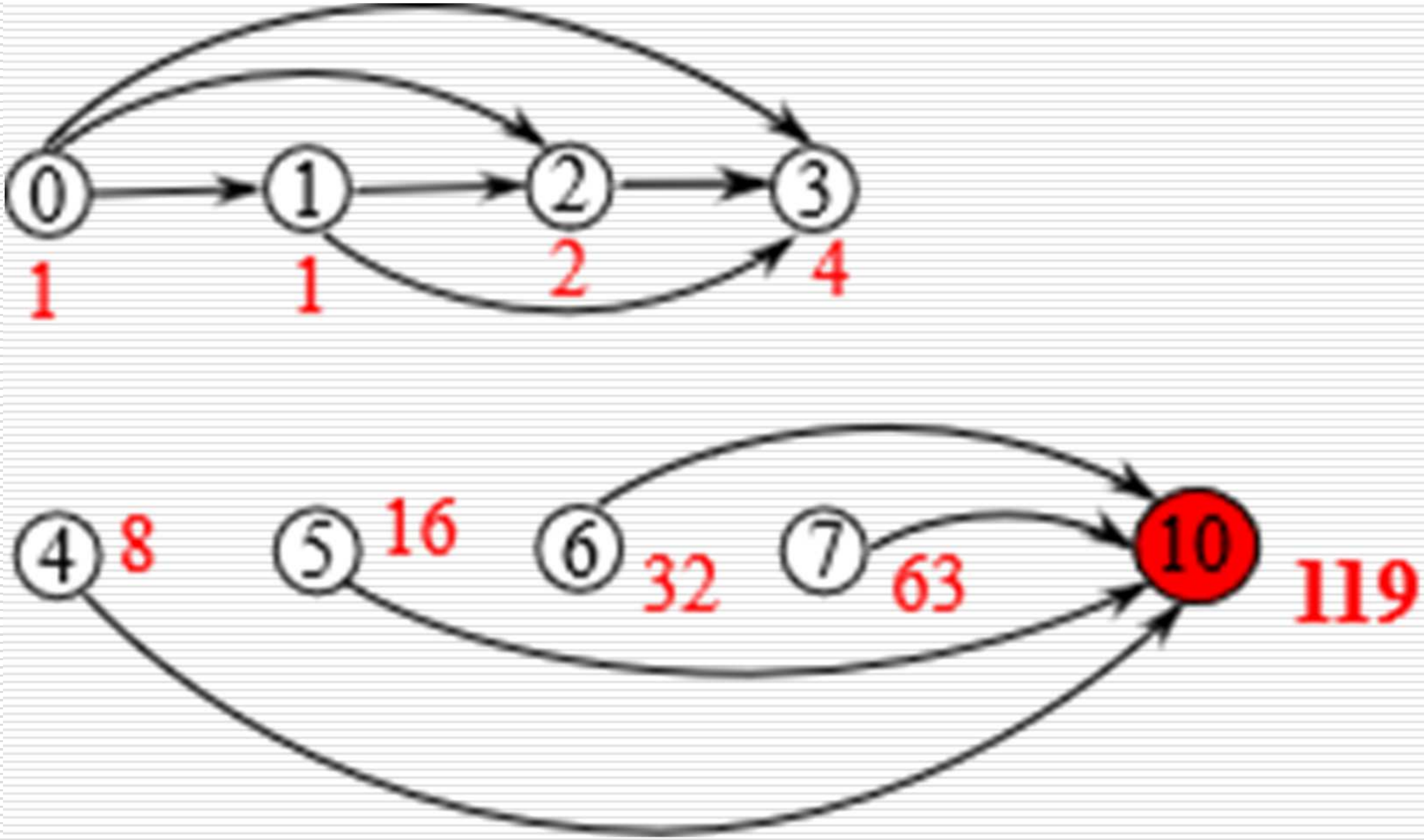
Láttam már: nyilak mentén eljutni A-ból B-be, esetek száma.

Állapot: az eddig dobott számok összege, kezdetben 0.

Állapotfüggvény: d(n) = ennyiféleképpen dobhatunk n-t.

d(0) = 1 a kezdőállapothoz rendelt érték.

NMMV2018, 7. osztály 4. feladat b) kérdés



NMMV2016, 7. osztály 8. feladat

Feladat: Egy osztály 25 tanulója közül senkinek sincs 11-nél több barátja az osztályban. A barátságok kölcsönösek. Igaz-e, hogy biztosan ki lehet választani az osztályból 3 olyan tanulót, akik közül senki sem barátja a másik kettő egyikének sem?

Ötlet: Adjunk meg egy algoritmus, amelynek az az eredménye, hogy garantáltan kiválasztunk három megfelelő tanulót.

Egy tanulót kiválasztok, kap egy sapkát a fejére. Ismerőseit megkérem, hogy menjenek ki az udvarra. A kiválasztott ember nem ismer senkit a jelenlévők közül. Ezt a lépést megismétlem.

A 2 lépés után kiválasztottam 2 embert és maximum 22 ment ki az udvarra. De akkor legalább 1 maradt, őt is kiválasztom.

NMDO2017, 5. feladat alapján

Feladat: Pisti felírta a táblára tetszőleges sorrendben a 20 legkisebb pozitív egész számot, tetszőleges sorrendben. Bizonyítsuk be, hogy biztosan le lehet törölni a számok közül 12 darabot úgy, hogy a táblán maradt számok közül növekvő sorrendben az 1. és a 2. között ne álljon egyetlen szám sem, a 3. és a 4. között se álljon egyetlen szám sem, az 5. és a 6. között se álljon egyetlen szám sem, és a 7. és a 8. között se álljon egyetlen szám sem!

Borbényi Márton (aranyérem) 7 pontot kapott a megoldására.

NMDO2017, 5. feladat alapján

Eredeti számsor:

8 19 1 14 9 13 3 4 7 20 16 17 2 12 6 11 15 5 18 10

Felosztom 4 db 5-ös csoportba:

8 19 1 14 9 | 13 3 4 7 20 | 16 17 2 12 6 | 11 15 5 18 10

Addig jelölök meg növekvő sorrendben számokat, amíg az egyik csoportban két megjelölt nem lesz:

8 19 1 14 9 | 13 3 4 7 20 | 16 17 2 12 6 | 11 15 5 18 10

Ezt a két számot megtartom. Ebből a csoportból törlök minden mást, és a többi csoportból a legkisebb számot, függetlenül attól, kijelölt volt-e:

8 19 14 9 | 3 4 | 16 17 12 6 | 11 15 18 10

NMDO2017, 5. feladat alapján

8 19 14 9 | 3 4 | 16 17 12 6 | 11 15 18 10

Az eredeti 2. csoport kész: a két legkisebb között nem áll más szám, a többi szám pedig nagyobb náluk.

Maradt: 3 db 4-es csoport. Eggyel csökkentettem a csoportok számát, illetve a csoportok elemszámát. Megismétlem a lépést.

8 19 14 9 | 3 4 | 16 17 12 6 | 11 15 18 10

8 9 | 3 4 | 16 17 12 | 11 15 18

8 9 | 3 4 | 16 17 | 11 15

Az algoritmus nyilván működik $n(n+1)$ számra, amelyből a végén $2n$ darab marad a megadott feltételekkel. (eredeti feladat)

Dobozok a raktárban

Feladat: Egy raktárban 11 darab nagy doboz áll, melyek közül néhány üres, a többi nagy doboz mindegyikében 8 darab közepes doboz található. A közepes dobozok közül néhány üres, a többiben 8-8 darab kis doboz van. A kis dobozok mindegyike üres. Hány doboz van a raktárban összesen, ha az üres dobozok száma 102?

Ismert az algebrai megoldás (táblázat, egyenletek)

Programozó gondolkodással megfertőzöttek:

Képzeljük el, hogy a jelenlegi helyzet egy kezdeti állapotból jött létre, egyforma jellegű lépések egy sorozatát követően.

Dobozok a raktárban

Kezdeti állapot: 11 üres nagy doboz

Lépés: 1 dobozt megtölt 8 kisebb dobozzal

Állapotfüggvények:
u(n): üres dobozok száma n lépés után
t(n): tele dobozok száma n lépés után

Kezdőértékek: u(0)=11, t(0)=0

Rekurziós lépés:
t(n+1)=t(n)+1 és u(n+1)=u(n)+7

Explicit alak: t(n)=n és u(n)=11+7n

102=11+7n → n=t(n)=13 → 102+13=115 doboz.

Strucctojás töréstesztje – klasszikus probléma átírva

Van 4 egyforma strucctojásunk. Szeretnénk 7 dobással kideríteni, hogy egy emeletes házban hányadik az az emelet, amelyről ledobva már összetörik, de egy emelettel lejjebbről dobva még éppen nem törik össze. Maximum hány emeletes lehet az a ház, amelyben ezt szerencse nélkül meg tudjuk tenni?

(Lehet, hogy a legfelső emeletről sem törik össze. A tojások a kérdés szempontjából egyformák. Legkésőbb akkor meg kell tudnunk mondani, „hol a határ”, miután mind a 4 tojás eltört vagy elvégeztük a hetedik dobásunkat.)

Strucctojás töréstesztje – klasszikus probléma átírva

Eredeti feladat: 2 tojás, 36 emelet,
kérdés a minimális dobásszám

Módszer neve: dinamikus programozás

$e(d;t)$ állapotfüggvény:
d dobással, t tojással ennyi emeletes lehet a ház

Az elsőt ledobom valahonnan.

Ha eltörik, alatta $e(d-1; t-1)$ emelet maradhat.

Ha nem, akkor felette $e(d-1; t)$ emelet vizsgálható.

Rekurzió: $e(d;t)=e(d-1;t-1)+e(d-1;t)+1$

Kezdeti értékek: $e(d; 1)=d$ és $e(1; t)=1$

Strucctojás töréstesztje – klasszikus probléma átírva

t \ d	1	2	3	4	5	6	7
1	1	2	3	4	5	6	7
2	1						
3	1						
4	1						

t \ d	1	2	3	4	5	6	7
1	1	2	3	4	5	6	7
2	1	3	6	10	15	21	28
3	1	3	7	14	25	41	63
4	1	3	7	15	30	56	98

Köszönöm a figyelmet!

Erdős Gábor

erdosgaborkanizsa@gmail.com

www.microprof.hu