



Algoritmikus gondolkodás

Erdős Gábor, Batthyány Lajos Gimnázium, Nagykanizsa

RLV 2026, Esztergom



Matematika és programozás

- Nem régen hallottam:
„Megfigyeltem, hogy azok a tanítványaim, akik programozó versenyeken is indulnak, egyre sikeresebben szerepelnek a hagyományos matematikaversenyeken.”
- Nincs komoly eredmény programozásból alapos matematikai tudás nélkül, de egyre inkább igaz, hogy nincs komoly matematikai eredmény a programozáshoz szükséges gondolkodásmód nélkül.
- Aki megérti a programozásban a rekurziót, annak sokkal természetesebb a teljes indukció gondolata.
- Aki gyakran gondolkodik algoritmikusan, annak a matematika feladat megoldása közben is eszébe jut ez a megközelítés.

Egy tanórai feladat (5. osztály)

- Pista bácsi egy ólban tyúkokat és nyulakat tart.
Az ólban lévő állatoknak összesen 13 fejük és 36 lábuk van.
Hányan vannak a nyulak?
- Kezdeti állapot: nyulak száma $n(0) = 0$, lábak száma $l(0) = 26$
- Lépés: cseréljünk egy tyúkot nyúlra – fejek száma invariáns
- Változás: $n(k + 1) = n(k) + 1$, $l(k + 1) = l(k) + 2$.
- Igazából két elsőrendű rekurzió $\rightarrow$ számtani sorozatok,
 $n(k) = k$, és $l(k) = 26 + 2k = 36 \rightarrow n(k) = k = 5$.
- Egyszerűbben: lépésenként 2-vel nő a fejek száma,
10-zel kell növelni, tehát 5 lépésre van szükség.



Dobozok a raktárban

- Egy raktárban 11 darab nagy doboz áll, melyek közül néhány üres, a többi nagy doboz mindegyikében 8 darab közepes doboz található. A közepes dobozok közül néhány üres, a többiben 8-8 darab kis doboz van. A kis dobozok üresek. Hány doboz van a raktárban összesen, ha az üres dobozok száma 102?
- Ismert az algebrai megoldás (táblázat, egyenletek)
- Programozó gondolkodással megfertőzöttek:
Képzeljük el, hogy a jelenlegi helyzet egy kezdeti állapotból jött létre, egyforma jellegű lépések egy sorozatát követően.

Dobozok a raktárban

- Kezdeti állapot: 11 üres nagy doboz
- Lépés: 1 dobozt megtölt 8 db egy mérettel kisebb dobozzal
- Állapotfüggvények:
 $u(n)$: üres dobozok száma n lépés után
 $t(n)$: tele dobozok száma n lépés után
- Kezdőértékek: $u(0) = 11, t(0) = 0$
- Rekurziós lépés:
 $t(n + 1) = t(n) + 1$ és $u(n + 1) = u(n) + 7$
- Explicit alak: $t(n) = n$ és $u(n) = 11 + 7n$
- $102 = 11 + 7n \rightarrow n = t(n) = 13 \rightarrow 102 + 13 = 115$ doboz.

Tündérek és boszorkányok - konstrukció

- Egy kerek asztalnál 72 szigetlakó ül, valamennyien tündérek vagy boszorkányok. A tündérek mindig igazat mondanak, a boszorkányok mindig hazudnak. Mindannyian azt állítják, hogy két boszorkány között ülnek.
Hány boszorkány ül az asztalnál?
- Nem lehet: BBB és TT, mert BTB biztosan
- „Legjobb” eset: BBTBBTBBT...BBT, $24 \cdot 2 = 48$ boszi,
„legrosszabb” eset: BTBTBT..., 36 boszi.
- Miért nem lehet 36-nál kevesebb, illetve 48-nál több?
- 2-es, illetve 3-as csoportok, skatulya-elv.
- És a minimum meg a maximum között minden lehet?
Ez triviális? Ha nem, akkor hogyan igazolható?

Tündérek és boszorkányok - konstrukció

- Egy kerek asztalnál 72 szigetlakó ül, valamennyien tündérek vagy boszorkányok. A tündérek mindig igazat mondanak, a boszorkányok mindig hazudnak. Mindannyian azt állítják, hogy két boszorkány között ülnek.
Hány boszorkány ül az asztalnál?
- Kezdeti állapot: BBTBBTBBT...BBT, 48 boszi.
- Lépés: Osszuk fel 6-os csoportokba, vegyük az első, aztán majd mindig a soron következő érintetlen hatost, és BBTBBT helyett legyen ott BTBTBT.
Ez nem zavarja az előtte és az utána ülőket, a szélső maradt.
- Egy lépésben a boszik száma 1-gyel csökkenthető.
- Mihez kellett? Algoritmussal adtam konstrukciót!

Színes kockák (kis NMMV 2016 6/3.)

- ▶ Petinek van 4 fehér és 23 zöld színű, 1 cm élhosszúságú kis kockája, amelyekből (az összeset felhasználva) a lehető legtöbb napon keresztül minden nap összerakott egy-egy 3 cm élhosszúságú kockát. Az egyetlen feltétel az volt az összerakásra, hogy semelyik nap sem készíthetett olyan kockát, amelynek felületén ugyanannyi négyzetcentiméter a zöld színű területek együttes nagysága, mint valamelyik korábbi napon. Az első kockát május elsején rakta össze. Melyik napon készítette az utolsót?
- ▶ Csúcskocka: 3 lapja látszik Élkocka: 2 lapja látszik
- ▶ Lapkocka: 1 lapja látszik Belső kocka: 0 lapja látszik
- ▶ Fehér minimum: $1 \cdot 0 + 3 \cdot 1 = 3$, maximum $4 \cdot 3 = 12$.

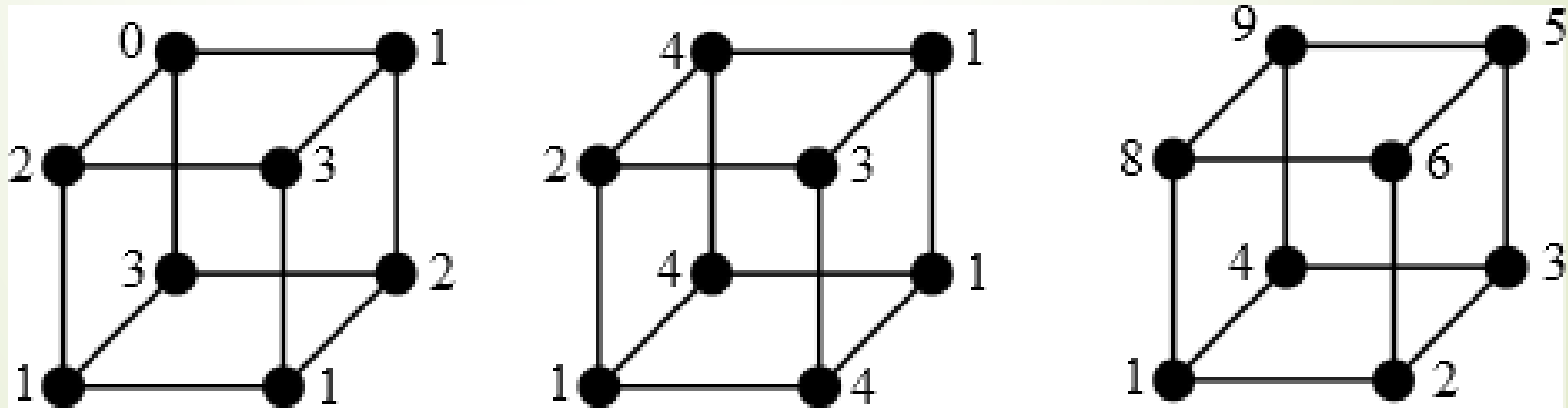
Színes kockák (kis NMMV 2016 6/3.)

➡ De: ebből nem következik, hogy lehet 4; 5; ...; 11 is!

	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
belső	1									
lap	3	4	3	2	1					
él			1	2	3	4	3	2	1	
csúcs							1	2	3	4
fehér	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

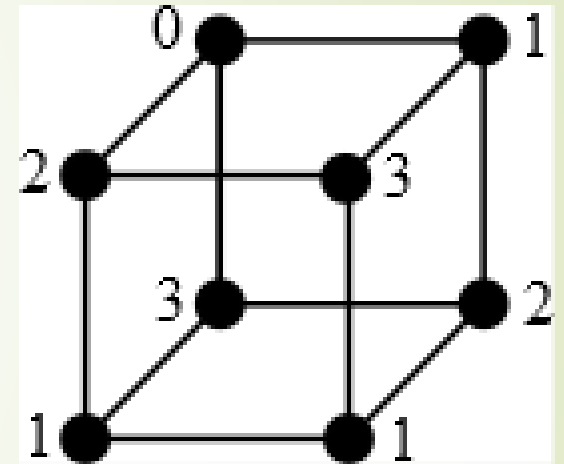
Számok egy kocka csúcsainál

- Egy kocka minden csúcsához egy számot írtunk. Ezután egy lépésben valamelyik él két végpontján lévő számokat eggyel megnöveljük. Elérhető-e néhány lépésben, hogy minden csúcsnál ugyanaz a szám álljon?



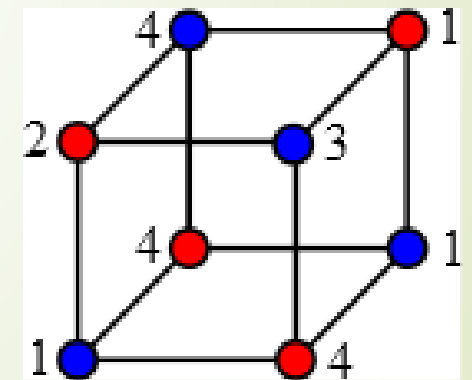
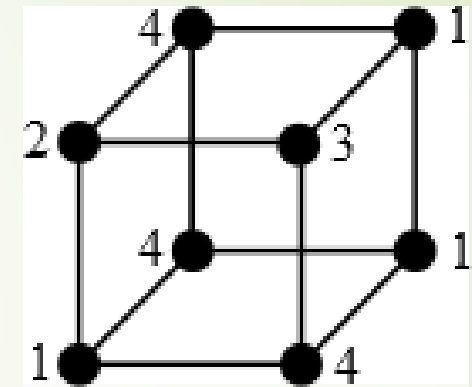
Számok egy kocka csúcsainál

- Állapotfüggvény: számok összege
- Változás egy lépés során: 2-vel nő
- Invariáns: az összeg paritása
- Kezdőállapot: 13
- Végállapot: 4-gyel osztható
- Következtetés: nem érhető el
- Szükséges feltétel:
A számok összege kezdetben páros.



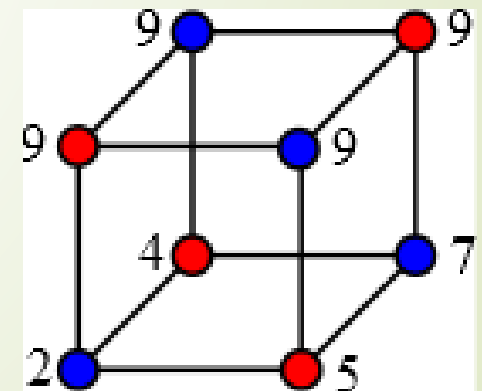
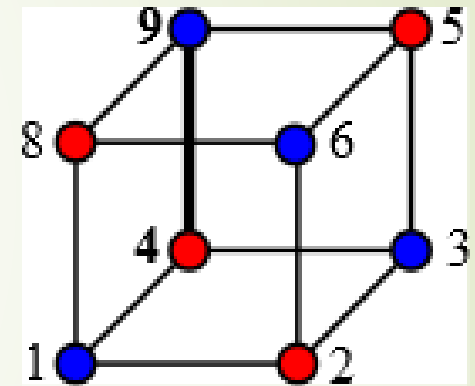
Számok egy kocka csúcsainál

- Az előző alapján:
az összeg kezdetben 20,
tehát lehetséges?
- Színezés, új állapotfüggvény:
piros – kék különbség,
ami a lépések során invariáns
- Kezdetben 2, a végén 0,
tehát ez sem lehetséges
- Ez a feltétel elégséges is?



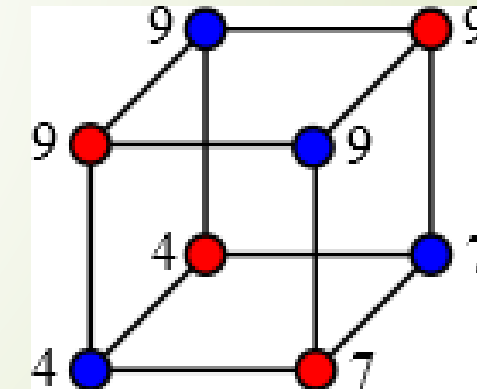
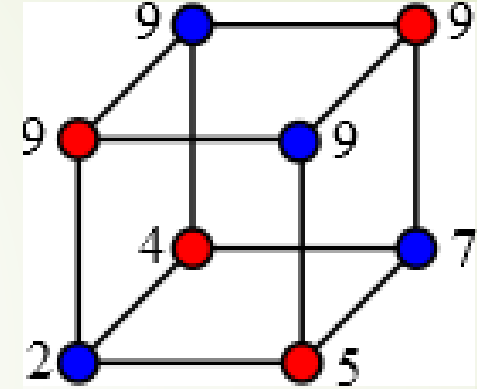
Számok egy kocka csúcsainál

- Algoritmust adok meg, amelyről látszik, hogy mindig végrehajtható
- 1. lépés: A legnagyobb szám legyen felül, ennek az oszlopát rögzítem
- 2. lépés. A többi oszlopot növelem, amíg felül minden szám egyenlő nem lesz egymással



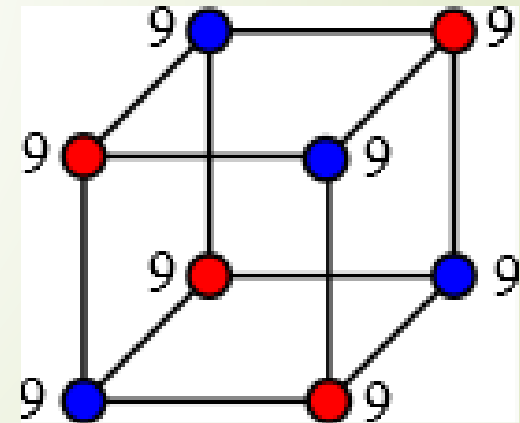
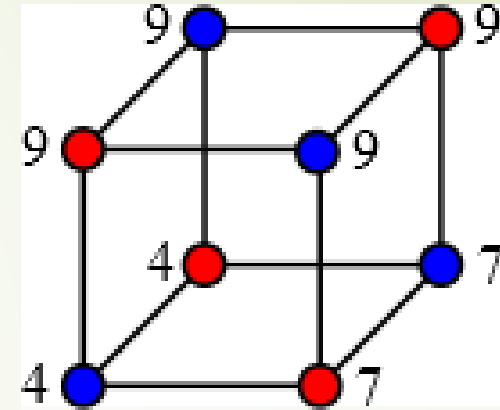
Számok egy kocka csúcsainál

- Alul megkeresem a legnagyobb számot, és ezt rögzítem (itt:7).
- Kiválasztom valamelyik szomszédját, és azt megnövelem úgy, hogy egyenlő legyen vele. (5)
- Ekkor alul a másik két szám is egyenlő lesz, mert csak így teljesül a feltétel.



Számok egy kocka csúcsainál

- Most alul 2-2 egyforma szám áll.
Az ezeket összekötő éleket
használva (4-4, 7-7) elérem,
hogy minden szám alul is annyi
legyen, mint felül.



Korongok a táblán

- Egy 16×4 -es tábla bal alsó 3×3 -as résztáblájának minden mezőjén egy-egy korongot helyeztünk el. Bármely koronggal átugorhatunk vele élben vagy csúcsban szomszédos mezőn álló korongot, ha az érkezési mező üres. Egy másik megengedett lépés, hogy egy korongot feljebb tolhatunk egy mezővel, ha az a mező üres. Minimum hány lépésben lehet eljuttatni a 9 korongot a bal felső 3×3 -as résztábla mezőire úgy, hogy minden mezőn egy-egy korong álljon?

○	○	○	
○	○	○	
○	○	○	
●	●	●	
●	●	●	
●	●	●	

Korongok a táblán

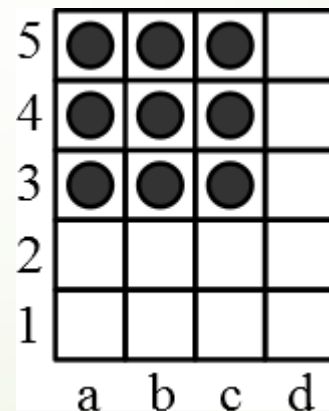
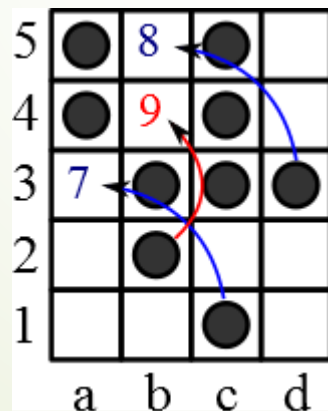
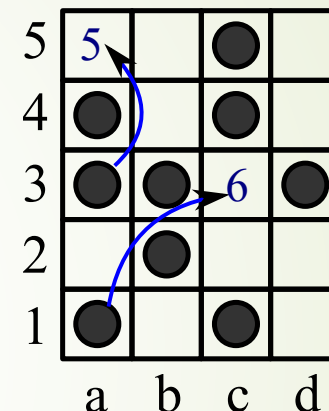
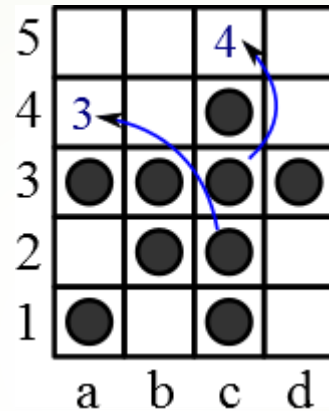
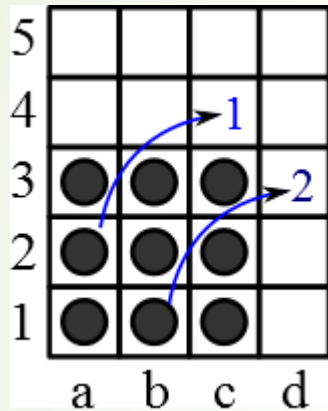
- Lehetséges csak ugrásokkal?
- Sakktábla-színezés: minden korong ugyanolyan színű mezőre ugrik, így a sötétben álló korongok száma invariáns.
- Kezdetben 5 korong áll fekete mezőn, a végén 4: kell minimum 1 tolás, mert azzal másik színű mezőre lép
- DE! Nem oldható meg 1 tolással, sávos színezés: kezdetben 6 korong áll fekete mezőn, a végén 3, tehát minimum 3 tolás kell.
- Átlagosan minden korong 13-mal kerül feljebb, tehát összesen $9 \cdot 13 = 117$ -tel kell magasabbra jutni.

Korongok a táblán

- A 3 tolás 3-mal növeli a magasságot, tehát kell még minimum $114 : 2 = 57$ ugrás, vagyis minimum 60 lépésre van szükség.
- Keressünk egy lépéssorozatot, amely 9 lépéssel megoldja, hogy a korongok átlagosan 2-vel feljebb kerüljenek.
- Ezt a lépéssorozatot megismételjük 6-szor: így a korongok az 1., 2., 3. sorból feljutnak a 13., 14., 15. sorba (ciklus; 54 ugrás).
- A 15. sort feltoljuk a 16. sorba (3 tolás).
- A 13. sorral átugorjuk a 14. sort (3 ugrás).

○	○	○	
○	○	○	
○	○	○	
●	●	●	
●	●	●	
●	●	●	

Korongok a táblán



Barátok (kis NMMV 2016 7/8.)

- Egy osztály 25 tanulója közül senkinek sincs 11-nél több barátja az osztályban. A barátságok kölcsönösek. Igaz-e, hogy biztosan ki lehet választani az osztályból 3 olyan tanulót, akik közül senki sem barátja a másik kettő egyikének sem?
- Ötlet: Adjunk meg egy algoritmus, amelynek az az eredménye, hogy garantáltan kiválasztunk három megfelelő tanulót.
- Egy tanulót kiválasztok, kap egy sapkát a fejére. Ismerőseit megkérem, hogy menjenek ki az udvarra. A kiválasztott ember nem ismer senkit a jelenlévők közül. Ezt a lépést megismétlem.
- 2 lépésben kiválasztottam 2 embert, és maximum 22 ember ment ki az udvarra.
De akkor legalább 1 maradt, őt is kiválasztom.

Számpárok (IMO 2017 5. feladat alapján)

- Pisti felírta a táblára tetszőleges sorrendben a 20 legkisebb pozitív egész számot. Bizonyítsuk be, hogy biztosan le lehet törölni a számok közül 12 darabot úgy, hogy a táblán maradt számok közül a legkisebb és a 2. legkisebb között se álljanak más számok, a 3. és a 4. legkisebb között se álljanak más számok, az 5. és a 6. legkisebb között se álljanak más számok, illetve a 7. és a 8. legkisebb között se álljanak más számok!
- Ötlet: Adjunk meg egy kiválasztási algoritmust, amely garantáltan a feladat feltételeinek megfelelő eredményre vezet!

Számpárok (IMO 2017 5. feladat alapján)

- Eredeti számsor:

8 19 1 14 9 13 3 4 7 20 16 17 2 12 6 11 15 5 18 10

- Felosztom 4 db 5-ös csoportba:

8 19 1 14 9 | 13 3 4 7 20 | 16 17 2 12 6 | 11 15 5 18 10

- Addig jelölök meg növekvő sorrendben számokat, amíg az egyik csoportban két megjelölt szám is lesz:

8 19 **1** 14 9 | 13 **3** **4** 7 20 | 16 17 **2** 12 6 | 11 15 **5** 18 10

- Ezt a két számot megtartom.

Ebből a csoportból törölök minden mást, és a többi csoportból a legkisebb számot, függetlenül attól, kijelölt volt-e:

8 19 14 9 | **3** **4** | 16 17 12 6 | 11 15 18 10

Számpárok (IMO 2017 5. feladat alapján)

- 8 19 14 9 | 3 4 | 16 17 12 6 | 11 15 18 10
- Az eredeti 2. csoport kész: a két legkisebb szám között nem áll más szám, a többi szám pedig nagyobb ezeknél.
- Maradt: 3 db 4-es csoport. Eggyel csökkentettem a csoportok számát, illetve a csoportok elemszámát. Megismétlem a lépést.
- 8 19 14 9 | 3 4 | 16 17 12 6 | 11 15 18 10
- 8 9 | 3 4 | 16 17 12 | 11 15 18
- 8 9 | 3 4 | 16 17 | 11 15
- Az algoritmus nyilván működik $n \cdot (n + 1)$ számra, amelyből a végén $2n$ darab marad a megadott feltételekkel.

Ház festése (kis NMMV 2018 7/8.)

- Egy emeletes ház minden emeletét pirosra, fehérre vagy zöldre festették. Tudjuk, hogy nincs három olyan közvetlenül egymás fölött lévő emelet, amelyeknek mindegyikét fehérre festették. Hányféleképpen lehet kifesteni a házat a szabályoknak megfelelően, ha az emeletek száma 7?
- Legyen $s(n)$: az n emeletes ház megfelelő színezéseinek a száma; kérdés: $s(7) = ?$ Tekintsünk most egy 7 emeletes házat, és bontsuk esetekre a felső emeletek színe szerint.
- Fontos! Ez a programozó gondolkodás: visszafelé lépünk. A matematikai lényegét is könnyebb így megérteni!

Ház festése (kis NMMV 2018 7/8.)

- Felső emelet piros vagy zöld: alatta egy szabályos, 6 emeletes ház, ez tehát $2 \cdot s(6)$ eset.
- Felső emelet fehér, alatta nem fehér: $2 \cdot s(5)$ eset.
- Felső 2 emelet fehér, így alatta nem fehér: $2 \cdot s(4)$ eset.
- Kaptuk: $s(7) = 2 \cdot (s(6) + s(5) + s(4))$
- Valójában: $s(n) = 2 \cdot (s(n-1) + s(n-2) + s(n-3))$
- Kezdeti értékek:
 $s(1) = 3$, $s(2) = 3 \cdot 3 = 9$ és $s(3) = 3 \cdot 3 \cdot 3 - 1 = 26$.
- $s(4) = 2 \cdot (26 + 9 + 3) = 76$,
 $s(5) = 2 \cdot (76 + 26 + 9) = 222$,
 $s(6) = 2 \cdot (222 + 76 + 26) = 648$,
 $s(7) = 2 \cdot (648 + 222 + 76) = 1892$.

Kosárlabda mérkőzés (kis NMMV 2026 6/8.)

- Kosárlabdában, ha egy csapat a labdát a kosárba juttatja, akkor ezzel vagy 1, vagy 2, vagy 3 pontot szerez. Egy mérkőzésen a hazai csapat a harmadik perc végén már 8:3-ra vezetett. A vendégek közben egyszer sem vezettek, ami nem is csoda, hiszen mindössze egyszer sikerült a labdát a kosárba dobniuk. Hányféleképpen alakulhatott ki ez az eredmény?
- Jelölje p_n azt, hogy hányféleképpen lehet n pontot elérni. Ekkor $p_1 = 1$, $p_2 = 2$ és $p_3 = 4$.
- Az előző feladathoz hasonlóan három esetet vizsgálva annak megfelelően, hogy az utolsó kosár hány pontos volt: $p_n = p_{n-1} + p_{n-2} + p_{n-3}$, ha $n \geq 4$.

Kosárlabda mérkőzés (kis NMMV 2026 6/8.)

- ▶ $p_4 = 7, p_5 = 13, p_6 = 24, p_7 = 44, p_8 = 81$.
- ▶ Javítási tapasztalat: felírta az összes esetet, csoportosítva. Aki programoz, az már hatodikban sem ezt teszi, nyolcadikban meg egészen biztosan nem!
- ▶ Attól függően, hogy mikor esett az ellenfél kosara:

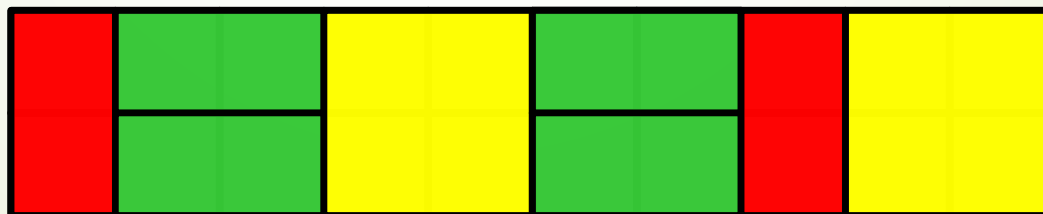
$$\begin{aligned} & p_3 \cdot p_5 + p_4 \cdot p_4 + p_5 \cdot p_3 + p_6 \cdot p_2 + p_7 \cdot p_1 + p_8 = \\ & = 4 \cdot 13 + 7 \cdot 7 + 13 \cdot 4 + 24 \cdot 2 + 44 \cdot 1 + 81 = 326. \end{aligned}$$

Bowlingpálya bérlése (Varga 2026 7/3/4.)

- Egy bowlingpályákat üzemeltető cég terme szilveszter éjszakáján két órán keresztül van nyitva 10 egymás mellett elhelyezkedő pályával, amelyek 1-től 10-ig vannak megszámozva. Vagy 1 pálya foglalható le, de akkor azt 2 órán keresztül kell bérelni, vagy 2 szomszédos pályát lehet kiválasztani, ilyenkor 1 órára és 2 órára is lehet bérelni. A bérlési naplóba csak azt rögzítik, hogy 1 vagy 2 órára bérelték-e ki az adott pályát, illetve azt, hogy egy szomszédos pályával együtt, vagy magában vették ki azt. Hány különböző módon tölthetik ki a bérlési naplót, ha a 2 órában minden pálya foglalt?
(Nem lehet olyan pálya, amit magában vesznek ki 1 órára, és 2-nél több pályát sem vehet ki senki 1 vagy 2 órára.)

Bowlingpálya bérlése (Varga 2026 7/3/4.)

- Modell: legyen a bérlési napló egy 2×10 -es táblázat, és 3-féle bérlési lehetőséget jelöljük más-más színnel.
- Kérdés: Hányféleképpen lehet lefedni a téglalapot ilyen alakzatokkal?
- Egy lehetséges lefedés:
(megfigyelés: zöld alakzatok csak párban lehetnek)



Bowlingpálya bérlése (Varga 2026 7/3/4.)

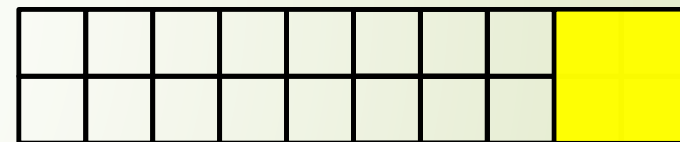
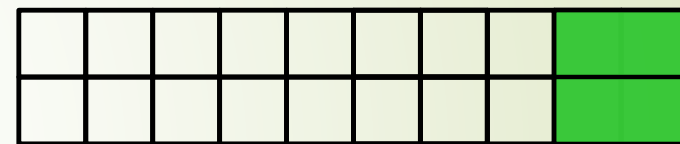
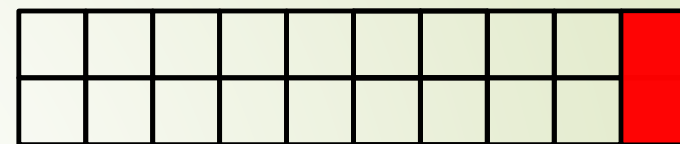
- Jelszó: Kezdjük kicsivel! (rekurzív módszer)
Legyen b_n a lehetséges bérlések száma, ha n pálya van.
- Ekkor $b_1 = 1$ és $b_2 = 3$.
- Feladatunk a b_{10} meghatározása.
Gondolkodjunk az előző feladathoz hasonlóan.
Képzeljük el, hogy valaki elkészítette az összes ábrát.
Csoportosítsuk aszerint, hogy milyen színű alakzat(ok)
fedi(k) le az utolsó oszlopot.

Bowlingpálya bérlése (Varga 2026 7/3/4.)

- Ha piros, akkor 9 oszlop marad előtte, ha zöld vagy sárga, akkor 8-8 oszlop, tehát az egyes típusú lefedések száma rendre $b_9; b_8; b_8$.

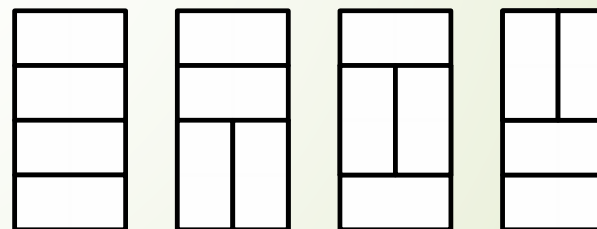
- $b_{10} = b_9 + 2 \cdot b_8;$
 $b_9 = b_8 + 2 \cdot b_7 ; \dots$
 $b_3 = b_2 + 2 \cdot b_1 = 3 + 2 \cdot 1 = 5 ;$
 $b_4 = 11; b_5 = 21; b_6 = 43;$
 $b_7 = 85; b_8 = 171; b_9 = 341;$
végül $b_{10} = 683$.

- Általánosan: $b_n = \frac{2^{n+1} + (-1)^n}{3}$



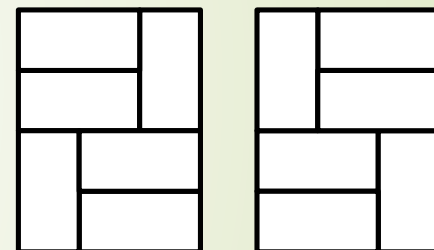
$4 \times n$ -es tábla lefedése dominókkal

- Legyen l_n a lehetséges lefedések száma, $l_1 = 1$.
- Csoportosítsuk a lefedéseket aszerint, hogy hányadik oszlop után lehet először kettévágni úgy a táblát, hogy egyetlen dominót sem vágunk ketté.
- Legyen $n = 2$. Ha az első oszlop után lehet vágni, akkor előtte 1, utána l_1 lehetőség van. Ha ott nem lehet vágni, akkor az alábbi ábrán látható 4 lehetőség van.
- Tehát $l_2 = 1 \cdot l_1 + 4 = 5$.



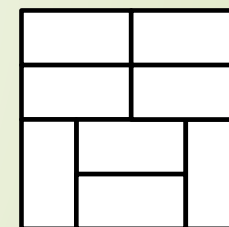
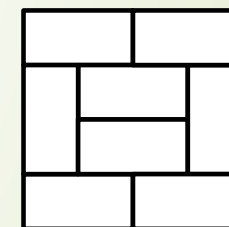
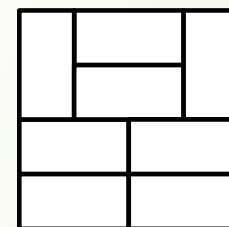
$4 \times n$ -es tábla lefedése dominókkal

- Legyen $n = 3$.
Ha az első oszlop után lehet először vágni,
akkor előtte 1, utána l_2 lehetőség van.
- Ha a második oszlop után lehet először vágni,
akkor előtte 4, utána l_1 lehetőség van.
- Ha sehol sem lehet vágni,
akkor az ábrán látható 2 lehetőség van.
- Tehát $l_3 = 1 \cdot l_2 + 4 \cdot l_1 + 2 = 1 \cdot 5 + 4 \cdot 1 + 2 = 11$.



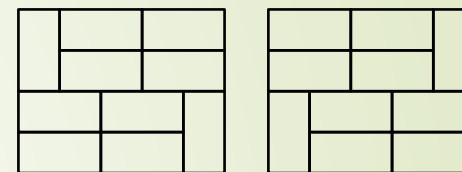
$4 \times n$ -es tábla lefedése dominókkal

- Legyen $n = 4$.
Ha az első oszlop után lehet először vágni,
akkor előtte 1, utána l_3 lehetőség van.
- Ha a második oszlop után lehet először vágni,
akkor előtte 4, utána l_2 lehetőség van.
- Ha a harmadik oszlop után lehet először vágni,
akkor előtte 2, utána l_1 lehetőség van.
- Ha sehol sem lehet vágni,
akkor az ábrán látható 3 lehetőség van.
- Tehát $l_4 = 1 \cdot l_3 + 4 \cdot l_2 + 2 \cdot l_1 + 3 = 36$.

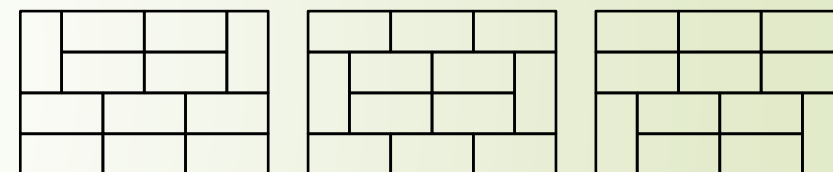


4× n -es tábla lefedése dominókkal

- A 3-hoz hasonlóan, ha 5; 7; 9; ... oszlop nem vágható el, akkor a lehetőségek száma mindig 2.



- A 4-hez hasonlóan, ha 6; 8; 10; ... oszlop nem vágható el, akkor a lehetőségek száma mindig 3.



- $l_n = 1 \cdot l_{n-1} + 4 \cdot l_{n-2} + 2 \cdot l_{n-3} + 3 \cdot l_{n-4} + 2 \cdot l_{n-5} + 3 \cdot l_{n-6} + \dots$
- Átalakítható negyedrendű rekurzióvá:

$$l_n = l_{n-1} + 5 \cdot l_{n-2} + l_{n-3} - l_{n-4}$$



Strucctojás töréstesztje (klasszikus átírva)

- Van 4 egyforma strucctojásunk. Szeretnénk 7 dobással kideríteni, hogy egy emeletes házban hányadik az az emelet, amelyről ledobva már összetörik, de egy emelettel lejjebbről dobva még éppen nem törik össze. Maximum hány emeletes lehet az a ház, amelyben ezt szerencse nélkül meg tudjuk tenni?
- (Lehet, hogy a legfelső emeletről sem törik össze. A tojások a kérdés szempontjából egyformák. Legkésőbb akkor meg kell tudnunk mondani, „hol a határ”, miután mind a 4 tojás eltört vagy elvégeztük a hetedik dobásunkat.)

Strucctojas töréstesztje (klasszikus átírva)

- $e(d; t)$ állapotfüggvény:
 d dobással, t tojással ennyi emeletes lehet a ház.
- Az elsőt ledobom valahonnan.
- Ha eltörik, alatta $e(d - 1; t - 1)$ emelet maradhat.
- Ha nem, akkor felette $e(d - 1; t)$ emelet vizsgálható.
- Rekurzió: $e(d; t) = e(d - 1; t - 1) + e(d - 1; t) + 1$
- Kezdeti értékek: $e(d; 1) = d$ és $e(1; t) = 1$

Strucctojs törésteztje (klasszikus átírva)

$t \backslash d$	1	2	3	4	5	6	7
1	1	2	3	4	5	6	7
2	1						
3	1						
4	1						

$t \backslash d$	1	2	3	4	5	6	7
1	1	2	3	4	5	6	7
2	1	3	6	10	15	21	28
3	1	3	7	14	25	41	63
4	1	3	7	15	30	56	98

Strucctojas törélesztje (klasszikus átírva)

- Algebrai gyakorlás lehetősége: Mi a helyzet például, ha $t = 2$?
- $e(d ; 1) = d$, így $e(d ; 2) = e(d - 1 ; 2) + (d - 1) + 1$
- Rekurzív definíció:
 $e(1 ; 2) = 1$ és $e(d ; 2) = e(d - 1 ; 2) + d$
- $e(1 ; 2) = 1$
 $e(2 ; 2) = e(1 ; 2) + 2$
 $e(3 ; 2) = e(2 ; 2) + 3$
 $\vdots$
 $e(d ; 2) = e(d - 1 ; 2) + d$

$$e(d ; 2) = 1 + 2 + 3 + \dots + d = \frac{d \cdot (d + 1)}{2} = \binom{d + 1}{2}$$

Strucctoajás töréskeresztje (klasszikus átírva)

$$\begin{aligned}
 e(d;3) &= \binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \binom{4}{2} \cdots + \binom{d}{2} + d = \\
 &= \binom{3}{3} + \binom{3}{2} + \binom{4}{2} \cdots + \binom{d}{2} + d = \binom{4}{3} + \binom{4}{2} \cdots + = \\
 &= \dots = \binom{d+1}{3} + d = \frac{(d+1) \cdot d \cdot (d-1) + 6d}{6} = \frac{d^3 + 5d}{6}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 e(d;4) &= \left(\binom{3}{3} + \binom{4}{3} \cdots + \binom{d}{3} \right) + (1 + 2 + 3 + \dots + d) = \\
 &= \binom{d+1}{4} + \binom{d+1}{2} = \frac{(d+1) \cdot d \cdot (d-1) \cdot (d-2) + 12 \cdot (d+1) \cdot d}{24} = \\
 &= \frac{(d+1) \cdot d \cdot (d^2 - 3d + 14)}{24}
 \end{aligned}$$

Josephus probléma (hatékony algoritmus?)

- Negyvenegyen körben állnak. Az embereket megszámozzuk valahonnan kezdve egyesével, az óramutató járásának megfelelő irányba haladva. A számozás elejétől kezdve, az óramutató járásának megfelelő irányba haladva minden második ember kiáll. Elsőként a 2., aztán a 4., és így tovább. Nem állnak meg akkor sem, amikor körbeértek, hanem folytatják ugyanúgy a kiállást, tehát ha a 40. kiállt, akkor a 41. marad, vagyis a következő, az 1-es kiáll, aztán a 3-as marad, és így tovább. Mindezt addig folytatják, amíg egyetlen ember marad a körben.

Mi volt a száma az utolsóként bentmaradónak?

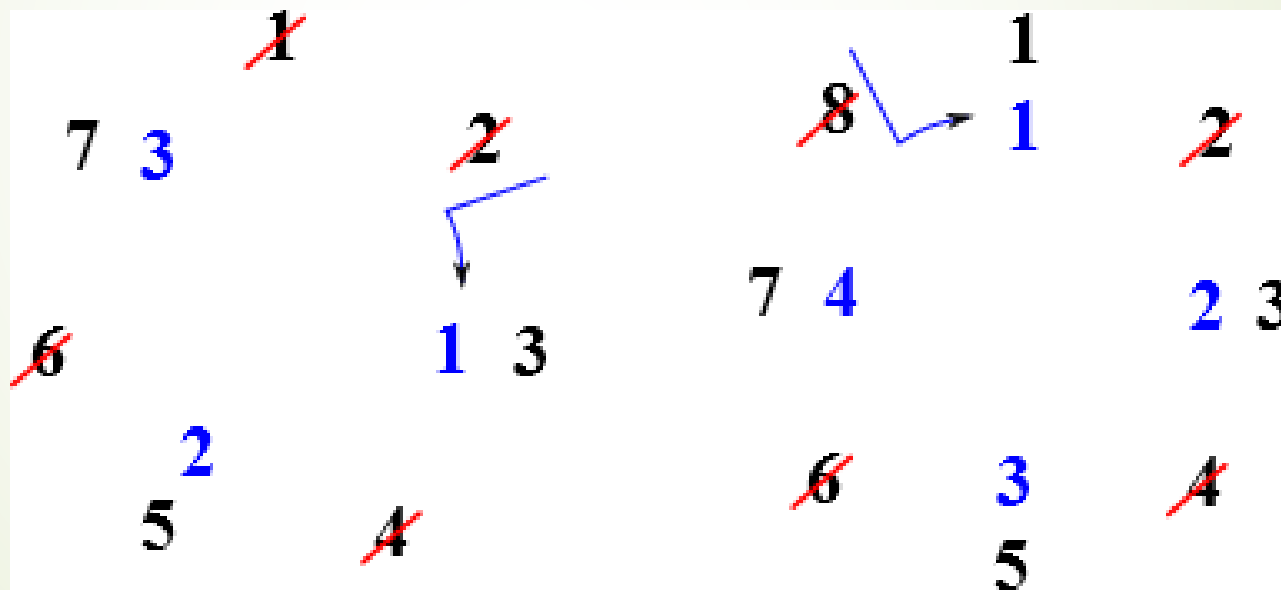
Josephus probléma (hatékony algoritmus?)

- Tanulságos feladat – hatékony algoritmus?
- $J(n)$: n ember esetén az utoljára maradó sorszáma
- Akár végig is csinálható – lineáris futási idő
- $J(1) = 1$ és $J(n) = J(n - 1) + 2$ (mindig mod n)

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
$J(n)$	1	1	3	1	3	5	7	1	3	5	7	9	11	13	15	1	3	5	7

Josephus probléma (hatékony algoritmus?)

- Miután egyszer körbeérünk, és újra kezdődnek a kiállások, adjunk mindenkinek egy új rajtszámot. Vizsgáljuk meg, hogy működik ez 7-re és 8-ra?



- $J(2k + 1) = 2 \cdot J(k) + 1$ és $J(2k) = 2 \cdot J(k) - 1$

Josephus probléma (hatékony algoritmus?)

$$J(41) = 2 \cdot J(20) + 1$$

$$J(20) = 2 \cdot J(10) - 1$$

$$J(10) = 2 \cdot J(5) - 1$$

$$J(5) = 2 \cdot J(2) + 1$$

$$J(2) = 2 \cdot J(1) - 1$$

$$J(1) = 1$$



$$J(41) = 19$$

$$J(20) = 9$$

$$J(10) = 5$$

$$J(5) = 3$$

$$J(2) = 1$$

$$J(1) = 1$$

- Hatékonyabb algoritmus: logaritmikus
- Itt még nem látszik, de 2026-ra:
10 lépés, nem pedig 2000-nél több

Josephus probléma (hatékony algoritmus?)

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
$J(n)$	1	1	3	1	3	5	7	1	3	5	7	9	11	13	15	1	3	5	7

- További megfigyelések:

$J(2^k) = 1$, utána páratlan számok: 3; 5; 7; 9; ...

- Bizonyítható (teljes indukcióval):

Ha $2^k \leq n < 2^{k+1}$ és $n = 2^k + r \implies J(n) = 2r + 1$

- Alkalmazás: $J(41) = J(32 + 9) = 2 \cdot 9 + 1 = 19$

Ez még hatékonyabb módszer!

- Kettes számrendszer: $n = 41 = 101001$

$J(n) = 2 \cdot 01001 + 1 = 010010 + 1 = 010011$

- Vagyis: írjuk át az első 1-et a szám végére.



Köszönöm a figyelmet!

Elérhetőségem: erdosgaborkanizsa@gmail.com

Honlapom: www.microprof.hu